Chapitre 10

Matrices

Nous allons dans ce chapitre découvrir la notion fondamentale de *matrice*.

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Définitions

Définition 10.1.1
On appelle matrice à n lignes et p colonnes *tout tableau de nombres de* $\mathbb{K}$ *de la forme*

Si une matrice A est de la forme précédente, on écrira $A =$

On note l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 10.1.2
On distingue quelques matrices particulières :

- *La matrice* $\mathbf{0}_{n,p}$ *est*
- *Une* matrice ligne *est*
- *Une* matrice colonne *est*
- *Une* matrice carrée *est*

10.2 Opérations sur les matrices

On peut faire plusieurs opérations sur les matrices. On peut d'abord définir l'addition des matrices et le produit par un scalaire, donnant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une structure *d'espace vectoriel*[*].

Définition 10.2.1
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$. On définit l'addition de A et B, notée $A+B$, la matrice

$$A + B =$$

Finalement, additionner deux matrices revient à additionner leurs coefficients.

NOTA

Attention, on ne peut additionner

EXEMPLE

On a par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

Proposition 10.2.2
L'addition vérifie des propriétés :

- *L'addition est commutative :*
- *L'addition est associative :*
- *La matrice $\mathbf{0}_{n,p}$ est élément neutre pour l'addition :*

Définition 10.2.3
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le produit de A par λ, noté λA la matrice

$$\lambda A =$$

∗. Voir le chapitre Espaces Vectoriels

NOTA

Attention, on parle bien du produit d'une matrice et d'un nombre. Le produit de matrices sera abordé plus tard.

EXEMPLE

On a

$$3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} =$$

Proposition 10.2.4
On a :

- *Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*
- *Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

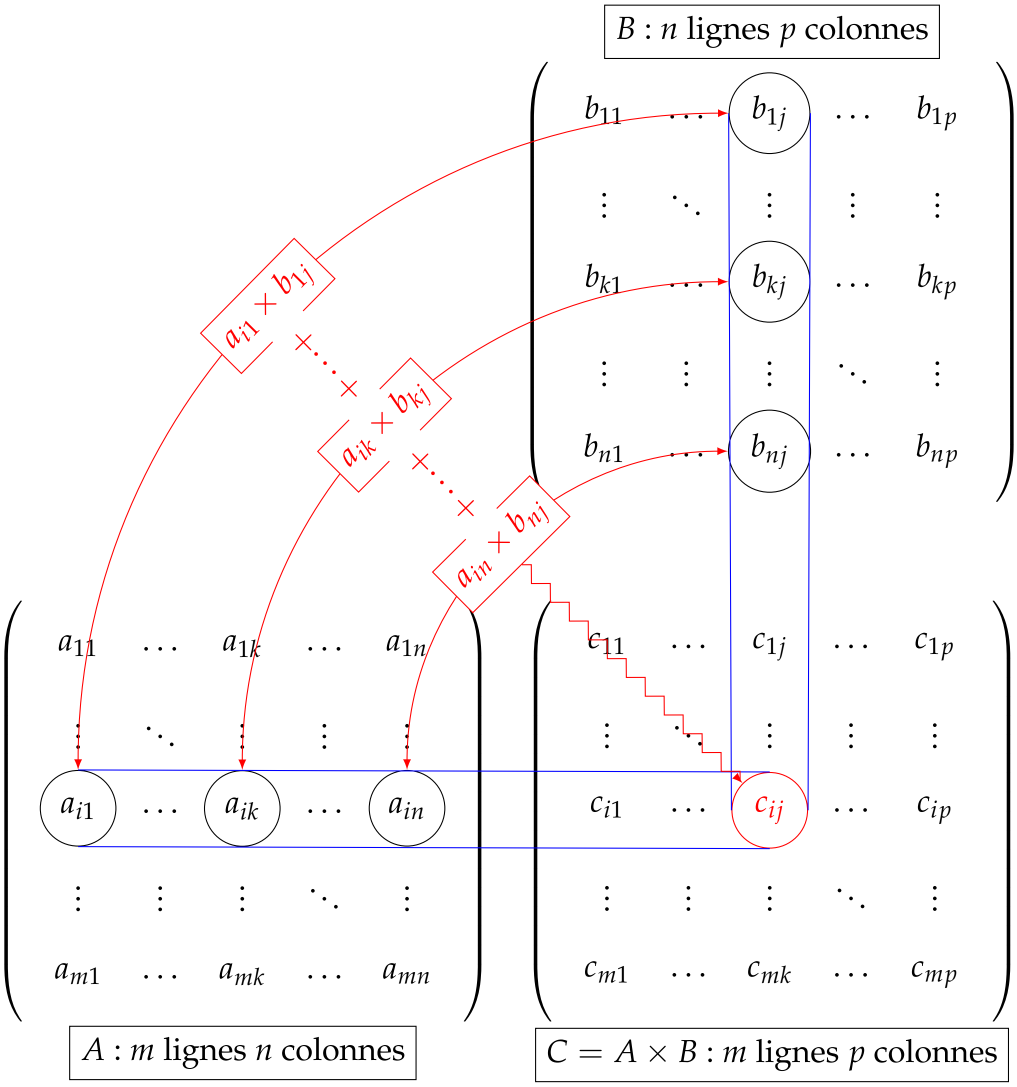
Comme dit précédemment, on peut aussi multiplier des matrices entre elles.

Définition 10.2.5
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ deux matrices. Alors le produit de A et B, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice de dont le coefficient (i, j) est donné par la formule

$$(AB)_{ij} =$$

Attention aux dimensions : il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.

En pratique, pour trouver le coefficient (i, j) de AB, on fait le produit terme à terme de la ligne i de A avec la colonne J de B. On peut faire le calcul en écrivant :



EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 10.2.6
Le produit matriciel satisfait quelques[†] *propriétés usuelles du produit :*

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{n,p},$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{n,p},$

†. Attention, pas toutes !

- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

NOTA

Attention ! Le produit matriciel n'est pas commutatif. En particulier, les identités remarquables ne sont pas vraies en général :

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \neq A^2 + B^2 + 2AB.$$

EXERCICE

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas, *i.e.* $AB \neq BA$.

Définition 10.2.7
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On appelle* transposée de A*, notée* ${}^tA$ *la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de* A *:*

$$({}^{\mathbf{t}}A)_{ij} = a_{ji}.$$

EXEMPLE

On a

$${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

Proposition 10.2.8
La transposée se comporte bien vis-à-vis des opérations matricielles :

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

Démonstration. En exercice. □

10.3 Matrices carrées

Pour toutes les opérations précédentes, on a vu qu'il faut être vigilants à la taille des matrices. En revanche, en partant de matrices carrées, les opérations ne changent plus les dimensions.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la place de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 10.3.1
La somme, produit par un scalaire, multiplication de matrices et transposition laisse $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable.

Définition 10.3.2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle diagonale *de A la suite $(a_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*

Définition 10.3.3
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est :

- diagonale *si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont sur la diagonale,* i.e.

  On note parfois $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
- triangulaire supérieure *si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessus de la diagonale,* i.e.
- triangulaire inférieure *si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessous de la diagonale,* i.e.

On appelle matrice identité d'ordre n *la matrice diagonale notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 :*

$$I_n = \qquad\qquad =$$

EXEMPLE

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement

EXERCICE

Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ${}^{\mathbf{t}}T = T$.

Proposition 10.3.4
Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration. Pour les matrices diagonales, il suffit de faire le calcul : en notant $C = AB$ où A et B sont diagonales, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} b_{ii} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Faisons la preuve pour les matrices triangulaires supérieures. Soient donc A et B deux matrices triangulaires supérieures, et notons $C = AB$. Alors si $i > j$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dans la première somme, les a_{ik} sont nuls, et donc la somme est nulle, et dans la seconde, on a $k \geqslant i > j$, et donc $b_{kj} = 0$.

Finalement, $c_{ij} = 0$, et donc C est triangulaire supérieure. □

Définition 10.3.5
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est*

- *symétrique si* ${}^{\mathbf{t}}A = A$, i.e.

$$\forall i, j,$$

- *antisymétrique si* ${}^{\mathbf{t}}A = -A$, i.e.

$$\forall i, j,$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrics symétriques (resp. antisymétrique) de taille n.

EXEMPLE

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement

EXERCICE

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

10.3.1 Opérations sur les matrices carrées

Définition 10.3.6
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de taille n. On appelle trace *de A, notée* $\mathrm{Tr}(A)$ *la somme des coefficients diagonaux :*

$$\mathrm{Tr}(A) =$$

EXEMPLE

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{Tr}(A) =$

Définition 10.3.7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les puissances de A *par récurrence :*

$$A^0 = I_n$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A \times A^n = A^n \times A$$

On peut alors, dans certains cas, utiliser la formule de binôme de Newton ‡.

‡. Isaac Newton, 1643 – 1727

Proposition 10.3.8
*Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent (*i.e.* $AB = BA$). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$(A+B)^p =$$

10.3.2 Matrices inversibles

Définition 10.3.9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est inversible *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10.3.10
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors sont équivalents :

(i) A est inversible

(ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$

(iii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$

Il suffit donc de trouver une matrice qui inverse A d'un seul côté pour pouvoir affirmer avoir trouver l'inverse.

NOTA

Attention ! Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Alors, en posant $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que $AB = I_2$. Donc A est inversible.

Proposition 10.3.11
Si une matrice A est inversible, alors l'inverse est unique. On le note A^{-1}.

Démonstration. Supposons qu'on a deux inverses B et C.

□

Proposition 10.3.12
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles. Si $AB = \mathbf{0}_n$, alors

Démonstration. Si A était inversible, on aurait

Si B était inversible, c'est identique. □

Proposition 10.3.13
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors AB est inversible si et seulement si A et B le sont, et dans ce cas

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Si A et B sont inversibles, il suffit de calculer
pour montrer que AB est inversible.

Si AB est inversible, alors
Donc A et B sont inversibles. □

Proposition 10.3.14
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si ${}^{\mathbf{t}}A$ est inversible, et dans ce cas

$$({}^{\mathbf{t}}A)^{-1} = {}^{\mathbf{t}}(A^{-1}).$$

Il est souvent difficile de montrer qu'une matrice est inversible, et encore plus de trouver effectivement l'inverse. Cependant, certains cas particuliers le permettent :

Proposition 10.3.15
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Alors A est inversible si et seulement si

Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire (supérieure ou inférieure).

Proposition 10.3.16
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors A est inversible si et seulement si

Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \operatorname{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \cdots, a_{nn}^{-1}).$$

EXEMPLE

On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Une méthode pour trouver un inverse peut être de chercher un *polynôme annulateur*

Définition 10.3.17
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que P est un polynôme annulateur de A *si $P(A) = \mathbf{0}_n$,* i.e.

$$a_p A^p + \cdots + a_1 A + a_0 I_2 = \mathbf{0}_n.$$

NOTA

La théorie (hors-programme) nous dit que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme annulateur de A, dont le degré est inférieur ou égal à n. Il est donc inutile de chercher un polynôme annulateur de degré plus grand que la dimension de la matrice.

Proposition 10.3.18
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur $P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$ avec $a_0 \neq 0$, alors A est inversible, et

$$A^{-1} =$$

Démonstration. On a donc

$$a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_2 = \mathbf{0}_n.$$

On peut factoriser A :

On a donc

et on en déduit le résultat quand $a_0 \neq 0$. □

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Alors , et donc

A est donc inversible, d'inverse

$$A^{-1} =$$

Démonstration. On vérifie que le polynôme
annule A. D'après la proposition précédente, si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et on peut trouver son inverse.

Si $ad - bc = 0$, alors . Si A était inversible, alors on aurait , ce qui implique $A = \mathbf{0}_2$, qui n'est pas inversible. □

10.3.3 Systèmes linéaires

Les matrices sont un bon moyen de représenter des systèmes d'équations linéaires.

Définition 10.3.19
On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kp}x_p & = & b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_p \end{array}\right.$$

Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

est appelée *Les matrices*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

sont appelées respectivement

Le système est alors équivalent à l'équation matricielle

Ceci permet de définir la notion de *rang* d'une matrice :

Définition 10.3.20
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*. On appelle* rang de A*, noté* $\mathrm{rg}(A)$*, le rang du système linéaire associé à* A*.*

Proposition 10.3.21
Soit A *une matrice. Alors* A *et* ${}^{\mathbf{t}}A$ *ont le même rang.*

Démonstration. Admis. □

Théorème 10.3.22
Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, et soit* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*. Alors l'équation matricielle* $AX = B$ *(et donc le système associé) a une unique solution si et seulement si*

Dans ce cas, cette unique solution est $X =$

Démonstration. $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ □

En pratique, résoudre un système avec cette méthode est très difficile, puisqu'il est difficile de trouver l'inverse d'une matrice en général. On utilisera plutôt l'autre sens, avec le théorème :

Théorème 10.3.23
Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

Démonstration. Admis. □

EXEMPLE

On veut inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

à l'aide du pivot de Gauss. On écrit sous forme de tableau : à gauche, la matrice A, à droite, la matrice I_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On veut transformer A en la matrice identité : on fait les opérations

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

On fait maintenant les opérations

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Pour finir, on fait les opérations

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

On trouve alors dans la partie droite la matrice inverse de A.

10.3.4 Cas des matrices 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Définition 10.3.24
On appelle déterminant de A, *noté* $\det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ *le réel* $ad - bc$.

Proposition 10.3.25
La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Le cas échéant, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On vérifie que le polynôme
annule A. On a donc, si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et on peut trouver son inverse.

Si $ad - bc = 0$, alors . Si A était inversible, alors on aurait , ce qui implique $A = \mathbf{0}_2$, qui n'est pas inversible. □

Proposition 10.3.26
Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ *admet une unique solution si et seulement si* $ad - bc \neq 0$. *Dans ce cas, on a*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

10.4 Exercices

Exercice 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les produits suivants sont-ils possibles ? Si oui, les calculer :

$$AB \quad ; \quad AC \quad ; \quad BA \quad ; \quad BC \quad ; \quad CB \quad ; \quad ABC \quad ; \quad BCA \quad ; \quad ACB$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et soit $N = A - I_3$.

a) Calculer N, N^2 et N^3.

b) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

c) Montrer que A est inversible, et calculer A^{-n} pour tout entier naturel n.

Exercice 3. Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. On pose $A = CL$ et $\lambda = LC$.

a) Quelles sont les dimensions de A et λ ?

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \lambda^{k-1} A$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ${}^{\mathbf{t}}AA$ est toujours symétrique.

Montrer que si ${}^{\mathbf{t}}AA = \mathbf{0}_n$, alors $A = 0$ (on pourra regarder les coefficients diagonaux de ${}^{\mathbf{t}}AA$).

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n).$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A, puis en déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

Exercice 7. À l'aide de la méthode de Gauss, calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On appelle J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Calculer J^2, J^3, et en déduire l'expression de J^n.

b) Pour toute matrice A, on note $\sigma(A)$ la somme de tous les coefficients de A. Montrer alors que

$$JAJ = \sigma(A) J.$$

Exercice 9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique.

Exercice 10. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles. Montrer que si $ABC = 0$, alors au moins deux des trois matrices sont non inversibles.

Exercice 11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$.

a) Montrer que $I_n - A - B + AB = I_n$.

b) En déduire que A et B commutent.