Chapitre 13

Géométrie dans le plan et dans l'espace

La géométrie est l'étude des figures du plan et de l'espace. Nous allons donc en voir quelques exemples : les vecteurs, les droites, les cercles et les plans.

Ce chapitre ne se prétend pas exhaustif ; il sera simplement un bon support pour les calculs en physique ou en géologie, et pourra nous servir d'exemple dans les chapitres d'algèbre linéaire.

On notera $\mathcal{P}$ le plan euclidien, et $\mathcal{E}$ l'espace euclidien.

13.1 Vecteurs du plan et de l'espace

13.1.1 Définitions

Définition 13.1.1
On appelle vecteur du plan

On appelle vecteur de l'espace

Les vecteurs seront parfois notés sous forme de matrices colonnes : on notera ainsi

au lieu de (x, y). On verra l'intérêt de cette notation dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Cela nous permet notamment de définir des opérations sur les vecteurs :

Définition 13.1.2
Soient $u = (a, b), v = (c, d)$ des vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le produit de u par λ est le vecteur $\lambda u =$. La somme de u et v est le vecteur

.

Ces opérations sont les mêmes pour les vecteurs de l'espace.

On peut évidemment faire un lien entre les vecteurs et les points du plan ou de l'espace :

Proposition 13.1.3
Il existe des bijections canoniques entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{P}$ et entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E}$. Plus précisemment, si on fixe des repères de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{P}$, les fonctions

sont des bijections.

Si O est l'origine du repère, l'image d'un point M par la réciproque de ces fonctions sera notée

Définition 13.1.4
Soit u un vecteur. L'unique point M tel que $u = \overrightarrow{OM}$ est appelé

Définition 13.1.5
À tout couple (A, B) de points du plan ou de l'espace, on peut associer un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, défini par

$$\overrightarrow{AB} =$$

Dans le cas de points du plan, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on a donc

$$\overrightarrow{AB} =$$

NOTA

Deux couples de points distincts peuvent donner le même vecteur. On dit alors qu'ils représentent le même vecteur.

Intuitivement, un vecteur ne représente qu'un déplacement dans le plan. Le vecteur $(3, 1)$ représente le déplacement de trois unités selon la première coordonnée du repère et d'une unité selon la seconde coordonnée.

Proposition 13.1.6
Soient A, B et C dans $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{P}$. On a :

-
-

13.1.2 Propriétés des vecteurs

Définition 13.1.7
Soit u un vecteur. On appelle norme

Si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $\|u\| =$.

Si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a alors $\|u\| =$.

Un vecteur de norme 1 est dit

La norme d'un vecteur est donc la longueur du déplacement qu'il représente.

Proposition 13.1.8
Le seul vecteur de norme nulle est

Définition 13.1.9
Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On appelle produit scalaire (euclidien) *de u et v le réel*

$$u \cdot v =$$

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit scalaire (euclidien) *de u et v le réel*

$$u \cdot v =$$

NOTA

Le produit scalaire pourra aussi être noté $\langle u, v \rangle$, $(u \mid v)$, *etc.*

Proposition 13.1.10
Soient u, v, w des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

-

-

-

Proposition 13.1.11
Pour tout vecteur u, on a

$$\|u\|^2 =$$

Définition 13.1.12
Deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont dits . On note alors

Géométriquement, deux vecteurs sont orthogonaux si placés en O, ils forment un angle droit.

EXERCICE

Déterminer les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs.

MÉTHODE :

Soit $u = (x, y)$ un vecteur du plan. Le vecteur est orthogonal à u.
Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de l'espace. Les vecteurs
sont orthogonaux à u.

Définition 13.1.13
Soient u et v deux vecteurs. u et v sont dits colinéaires

Géométriquement, deux vecteurs sont colinéaires si placés en O, ils sont alignés.

Proposition 13.1.14
Deux vecteurs du plan $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont colinéaires si et seulement si

NOTA

On note qu'ils sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul.

On l'appelle *déterminant de u et v*.

NOTA

On peut noter que le déterminant de deux vecteurs est exactement l'aire (algébrique) du parallélogramme induit par ces vecteurs. L'aire est alors nulle si et seulement si le parallélogramme est aplati, et donc les vecteurs colinéaires.

EXERCICE À CONNAÎTRE

Soient u et v deux vecteurs non nuls orthogonaux du plan. Montrer qu'un vecteur w est orthogonal à u si et seulement s'il est colinéaire à v.

13.2 Objets géométriques du plan et de l'espace

Étudions maintenant quelques objets géométriques du plan et de l'espace.

13.2.1 Droites du plan et de l'espace

Représentations des droites

Définition 13.2.1
On appelle droite *la donnée de*

-
-

La droite est alors l'ensemble des points M tels que

On note (AB) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A. On a donc

$(AB) =$

Si le réel λ est limité à $[0,1]$, on parle alors de *segment* $[AB]$.

Proposition 13.2.2 : Représentation paramétrique d'une droite du plan
Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a,b)$ passant par $A(x_A, y_A)$. Alors un point $M(x,y)$ appartient à la droite si et seulement si

Démonstration. C'est une simple traduction en coordonnées de la définition. □

Proposition 13.2.3 : Représentation paramétrique d'une droite de l'espace
Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a,b,c)$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un

point $M(x,y,z)$ appartient à la droite si et seulement si

NOTA

Ces représentations paramétriques ne sont pas uniques : deux couples (vecteur,point) donnent des équations différentes, mais peuvent représenter la même droite.

Proposition 13.2.4 : Équation cartésienne d'une droite du plan
Soit (d) la droite de vecteur directeur u passant par $A(x_A, y_A)$. Soit $v = (a,b)$ un vecteur orthogonal à u. Alors un point $M(x,y)$ appartient à la droite si et seulement si

Démonstration. On a déjà vu que les points de la droite sont
. Or c'est équivalent à dire que

Un passage aux coordonnées donne le résultat. □

Définition 13.2.5
Soit (d) la droite d'équation cartésienne $ax + by = c$.

- *si $b = 0$, la droite est verticale*
- *sinon, on appelle* coefficient directeur *de la droite le réel*

EXEMPLE

Soit (d) la droite de vecteur directeur $u = (3,1)$ passant par $A(2,4)$.
Une équation paramétrique de (d) est donnée par

et une équation cartésienne par

MÉTHODE : Passage d'une représentation à l'autre

Pour passer d'une représentation cartésienne $ax + by = c$ à une représentation paramétrique :

-
-
-
-

Pour passer d'une représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a + bt \\ y = c + dt \end{array}\right.$ à une représentation cartésienne :

-
-
-
-

Projeté orthogonal sur une droite

Définition 13.2.6
Deux droites (d) et (d') sont dites orthogonales *ou* perpendiculaires *si*

Proposition – Définition 13.2.7
Soient (d) une droite et A un point. On appelle projeté orthogonal *de A sur (d) l'unique point H tel que*

EXERCICE

Si $A \in (d)$, montrer que le projeté orthogonal de A sur (d) est A.

Théorème 13.2.8
Le projeté orthogonal H de A sur (d) est l'unique point tel que

Démonstration. Par définition, H est bien sur (d).

Soit M un point de (d). On a alors, par le théorème de Pythagore

En particulier, si $M \neq H$, alors . H est donc l'unique point minimisant la distance. □

Définition 13.2.9
On appelle distance d'un point A à une droite (d) la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (d). On la note $d(A, d)$.

Définition 13.2.10
Soient u et v deux vecteurs. On appelle projeté orthogonal *de u sur v*

Attention, le projeté de u sur v et celui de v sur u sont différents.

Proposition 13.2.11
Soit H le projeté orthogonal de u sur v. Alors

Corollaire 13.2.12
On a pour tous vecteurs u et v, formant un angle θ

Démonstration. On note que, avec les notations précédentes,
d'où

D'autre part, avec la proposition précédente,

On a donc l'égalité souhaitée. □

Proposition 13.2.13
Soient $A(x_A, y_A)$ un point, et (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by = c$. Alors

Démonstration. Calculons le produit scalaire entre $\overrightarrow{AH}$ et $u = (a, b)$. D'une part,

D'autre part, on a

les vecteurs étant colinéaires. □

13.2.2 Cercles du plan

Définition 13.2.14
Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $R > 0$. On appelle cercle de centre Ω et de rayon R *l'ensemble*

$$\mathcal{C}(\Omega, R) =$$

Proposition 13.2.15 : Équation paramétrique du cercle
Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$\mathcal{C}(\Omega, R) =$

Démonstration. Soit $M(x, y)$ sur le cercle. Alors ,
i.e.

Or on a vu dans le chapitre sur les nombres complexes qu'il existait alors un $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que et . On retrouve donc le résultat.

L'inclusion réciproque est évidente. □

Proposition 13.2.16 : Équation implicite du cercle
Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$\mathcal{C}(\Omega, R) =$

Réciproquement, toute courbe d'équation implicite
avec *est une équation de cercle.*

Démonstration. Seule la réciproque n'est pas évidente. On utilise la forme canonique pour les trinômes du second degré

On retrouve une équation de cercle si , et
sinon. □

13.2.3 Plans de l'espace

Définition 13.2.17
Un plan de l'espace P est défini par deux vecteurs non colinéaires et un point A. Plus précisément, si u, vv sont des vecteurs et A un point, alors

$P =$

Proposition 13.2.18 : Représentation paramétrique d'un plan
Soit P le plan de vecteurs directeurs $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

Proposition 13.2.19 : Équation cartésienne d'un plan
Soit P le plan de vecteurs directeurs u et v passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

Soit $w = (a, b, c)$ un vecteur orthogonal au plan.

Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

MÉTHODE : Passage d'une représentation à l'autre

> Pour passer d'une représentation cartésienne $ax + by + cz = d$ à une représentation paramétrique :

-
-
-
-

Pour passer d'une représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a + b\lambda + c\mu \\ y = d + e\lambda + f\mu \\ z = g + h\lambda + i\mu \end{array}\right.$ à une représentation cartésienne :

-
-
-
-

On pourrait de la même façon définir les projetés orthogonaux de points sur des plans, puis la distance entre un point et un plan, *etc.*

13.3 Barycentres

Définition 13.3.1
On appelle système de points pondérés

Définition 13.3.2

Soit $\{(A_1, p_1), \ldots, (A_n, p_n)\}$ *un système de points pondérés, tel que* $\sum p_i \neq 0$. *On appelle* barycentre *du système tout point G tel que*

Proposition 13.3.3
Soit $\{(A_1, p_1), \ldots, (A_n, p_n)\}$ *un système de points pondérés, tel que* $\sum p_i \neq 0$. *Il existe un unique barycentre G du système, qui vérifie pour tout point M*

On note alors Bar $\{(A_1, p_1), \ldots, (A_n, p_n)\}$ *ce barycentre.*

Démonstration. Raisonnons par analyse-synthèse.

Supposons donc que G est un barycentre du système. Soit M un point quelconque. Alors par la relation de Chasles,

d'où

En choisissant $M = O$, on a bien une caractérisation de G, et on a bien la formule demandée.

Réciproquement, soit G défini par

On vérifie alors, avec la relation de Chasles, que G est un barycentre du système. $\square$

Corollaire 13.3.4
Les coordonnées du barycentre sont les barycentres des coordonnées.

Proposition 13.3.5
Soit $\{(A_1, p_1), \ldots, (A_n, p_n)\}$ *un système de points pondérés. Soit* $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Alors

13.4 Exercices

Exercice 1. Soient u et v deux vecteurs. Montrer que

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|.$$

Exercice 2. Soient u et v deux vecteurs. Montrer que

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2),$$

puis l'identité du parallélogramme

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Exercice 3. Soient A, B, C trois points du plan non alignés.

a) Soit M un point du plan. Montrer que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}.$$

b) En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 4. Soient A, B deux points du plan. Déterminer tous les points M tels que

$$(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 5. Donner des équations paramétriques des droites définies par les équations cartésiennes

- $2x + 3y - 4 = 0$
- $3y = 2$
- $2x + 2y = 3$
- $y = 2x - \frac{1}{2}$

Exercice 6. Donner des équations cartésiennes des droites définies par les équations paramétriques

- $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t + 2 \end{cases}$

Exercice 7. Soit ABC un triangle du plan non aplati. On note γ la mesure de l'angle en C. Montrer le théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus)

$$AB^2 = CB^2 + AC^2 - 2 \times CB \times CA \cos \gamma.$$

Exercice 8. Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M(x, y)$ vérfiant

$$x^2 + y^2 - 4x + y + m = 0.$$

Dans le cas d'un cercle, on donnera ses équations implicites et paramétriques.

Exercice 9. Dans le plan, soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(3,0)$ et de rayon 1, et $\mathcal{C}_m$ celui d'équation $x^2 + (y-4)^2 = m$, $m > 0$.

Étudier le nombre de points d'intersections de ces deux cercles.

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. Montrer que toute droite tangente au cercle est orthogonale aux rayons du cercle.

Exercice 11. Donner une équation paramétrique du plan défini par

$$x + 2y + 2z = 4.$$

Donner une équation paramétrique du plan défini par

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu - 5 \\ y = 4\lambda - \mu + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

Exercice 12. Soit ABC un triangle équilatéral du plan. Soit I le milieu de $[BC]$ et soit H le projeté orthogonal de I sur (AB).

a) Montrer que H est le barycentre de $\{(A,1),(B,3)\}$.

b) Montrer que le barycentre de $\{(A,1),(B,5),(C,2)\}$ est le milieu de $[IH]$.