Chapitre 14

Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

14.1 Généralités sur les polynômes

14.1.1 Définition d'un polynôme

Définition 14.1.1
On appelle monôme *(d'indéterminée X) toute expression de la forme*

Si $k = 0$, on note plutôt $X^0 = 1$ et $aX^0 = a$.

On appelle alors polynôme *(d'indéterminée X)*

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X.

EXEMPLE

sont des polynômes.

NOTA

Attention, X désigne ici un objet formel, sans signification. Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), il ne faut pas confondre

- $2x^2 + 3x - 1$, qui est
- $2X^2 + 3X - 1$, qui est
- $ax^2 + bx + c = 0$, qui

- $aX^2 + bX + c = 0$, qui

Proposition 14.1.2
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un entier n et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P =$$

Les a_k sont appelés

Démonstration. P est une somme finie de monômes de la forme $a_i X^i$: soit donc n

Tous les autres monômes ont donc une puissance plus petite, et on peut écrire

$$P =$$

quitte à prendre $a_k = 0$ pour les monômes qui n'apparaissent pas. □

L'usage veut qu'on écrive les polynômes dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances des monômes.

NOTA

Attention, toutes les puissances de monômes qui apparaissent dans un polynômes doivent être positives ; il n'existe pas de puissances de X négatives.

Définition 14.1.3
On appelle :

- polynôme nul
- polynôme unité

Définition 14.1.4
Deux polynômes sont égaux
En particulier, un polynôme est nul si et seulement si

EXEMPLE

Ainsi, les polynômes $aX^2 + bX + c$ et $dX^2 + eX + f$ sont égaux si et seulement si

Définition 14.1.5
On appelle degré *d'un polynôme P*
. On note *le degré de P, et par convention,* $\deg(0) =$.

On appelle coefficient dominant *de P*

On dit qu'un polynôme est unitaire *si*

On dit qu'un polynôme est constant *si*

On note alors $K_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

NOTA

Deux polynômes égaux ont le même degré, et deux polynômes n'ayant pas le même degré ne sont pas égaux.
Attention, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela ne signifie pas que $\deg(P) = n$. On sait seulement que $\deg(P) \leqslant n$, et que $\deg(P) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$.

14.1.2 Opérations sur les polynômes

Définition 14.1.6
Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ des polynômes, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- *on appelle* somme *de P et Q le polynôme*

$$P + Q =$$

- *on appelle* produit *de P par λ le polynôme*

$$\lambda P =$$

- *on appelle* produit *de P et Q le polynôme*

$$PQ =$$

EXEMPLE

Soient $P = 2X^2 + 1$ et $Q = 3X^3 - X^2 + 2X + 1$. Alors

- $P + Q =$
- $3P =$
- $PQ =$

Proposition 14.1.7
Soient P, Q et R des polynômes. Alors

- $P \times 0 =$
- $PQ = 0 \Rightarrow$
- *si $P \neq 0$, alors*

Proposition 14.1.8
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

-
-
-

Démonstration.
- Soit $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ (par exemple $n = \deg(P)$). Alors

$$P + Q =$$

avec $a_k \neq 0$. Deux cas se présentent :

  - si $\deg(Q) < \deg(P)$, alors
  - si $\deg(P) = \deg(Q)$, alors

- C'est évident.
- Soient $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$. Si P ou Q est nul, c'est évident. Sinon, on montre que $a_k = 0$ pour $k > n + m$, et $a_{n+m} \neq 0$.

– Soit $k > n + m$. Alors

$$c_k =$$

$$=$$

$$=$$

Or $k > n + m$, et donc

– On a de la même façon

$$c_{n+m} =$$

$$=$$

$$=$$

□

Proposition 14.1.9
Les égalités remarquables sont vraies sur $\mathbb{K}[X]$. Si $n \geqslant 1$:

$$(P+Q)^n =$$

$$P^n - Q^n =$$

Définition 14.1.10
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On appelle composée de P et Q *le polynôme*

$$P \circ Q =$$

où $P =$.

NOTA

Attention, la composition n'est pas commutative.

EXEMPLE

La composée de X^2 et $X+1$ est

Proposition 14.1.11
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

Définition 14.1.12
On définit la dérivée *d'un polynôme par*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' =$$

EXEMPLE

La dérivée de X^2 est , la dérivée de $3X^3 - 1$ est et la dérivée de 1 est

Proposition 14.1.13
La dérivation est linéaire, i.e.

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)' =$$

On a aussi

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)' =$$

Proposition 14.1.14
Pour tout polynôme P de degré au moins 1, on a $\deg(P') =$ *. Si* $\deg(P) = 0$ *ou* $-\infty$*, alors* $\deg(P') =$ *.*

Définition 14.1.15
On définit la dérivée k-ième *d'un polynôme P par récurrence :*

-

-

EXEMPLE À CONNAÎTRE

Pour tous entiers $n \geqslant p$, on a

$(X^n)^{(p)} =$

Proposition 14.1.16
Si $k \leqslant \deg(P)$*, alors*

$$\deg(P^{(k)}) =$$

Si $k > \deg(P)$*, alors*

$$P^{(k)} =$$

Théorème 14.1.17 : Formule de Taylor
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$*. Alors*

$$P =$$

14.2 Fonctions polynomiales

Définition 14.2.1
Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$*. On appelle* application polynomiale associée à P *l'application*

NOTA

En pratique, on a tendance à donner le même nom au polynôme P et à l'application polynomiale associée.
Il y a en fait une bijection entre les polynômes et les applications polynomiales.

Toutes les opérations sur les polynômes se transmettent de la même façon aux applications polynomiales :

- si $R = P + Q$, alors
- si $R = P \circ Q$, alors
- *etc.*

NOTA

On note qu'en particulier, on identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes de degré $\leqslant 0$: $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X]$. Sous cette identification, on a alors si $a \in \mathbb{K}$ (ou $a \in \mathbb{K}_0[X]$)

Les futurs résultats pourront donc être énoncés indifféremment pour les polynômes ou pour les applications polynomiales.

14.3 Racines d'un polynôme

Définition 14.3.1
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine *de P si*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une racine de multiplicité k *de P si*

EXEMPLE

On peut écrire $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$, donc est racine de ce polynôme.
Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut continuer en

$$X^3 + X^2 + X + 1 =$$

et donc et sont aussi racines.

On peut écrire $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1)^2$, donc est racine de multiplicité
Sur $\mathbb{C}$, on a donc $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$, et donc et sont racines de multiplicité

Théorème 14.3.2
$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si

Démonstration. Le sens direct est évident. Supposons donc que $P(a) = 0$. On a alors

$$P =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

a est donc bien une racine de P. □

On utilise souvent le théorème précédent pour factoriser des expressions.

EXERCICE

Factoriser le polynôme $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Théorème 14.3.3
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est racine de P de multiplicité k si et seulement si

Démonstration. Supposons que a est racine de P de multiplicité k. Montrons le résultat par récurrence sur k :

- si $k = 1$,
- supposons le résultat vrai pour un k. Soit a de multiplicité $k+1$. Alors on peut écrire $P = (X - a)^{(k+1)}Q$ où a n'est pas racine de Q. Alors

  $P' =$

  où a n'est pas racine de R. Par hypothèse de récurrence, on a donc pour tout i entre 0 et $k - 1$. En ajoutant que $P(a) = 0$, on a le résultat voulu.

Inversement, supposons que toutes les dérivées de P s'annulent en a jusqu'au rang k. La formule de Taylor de P en a s'écrit donc

$$P =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$P^{(k)}(a)$ étant non nul, a n'est pas racine de Q. □

Corollaire 14.3.4
Soit P un polynôme non nul. Soient $a_1, \ldots, a_p$ les racines de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Alors

Autrement dit, le nombre de racines, comptées avec multiplicité, d'un polynôme est inférieur à son degré.

MÉTHODE : Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

-
-
-

EXEMPLE

La fonction sin n'est pas polynomiale. Sinon, soit P le polynôme associé. Alors

EXERCICE

Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

14.3.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 14.3.5 : de d'Alembert*-Gauss
Tout polynôme complexe non constant

NOTA

On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Corollaire 14.3.6
Tout polynôme complexe non nul

Corollaire 14.3.7
Tout polynôme P complexe se factorise en

$$P =$$

où $\lambda \in C$, et les a_i sont racines de P de multiplicité α_i.

NOTA

Attention, ce résultat n'est vrai que pour les polynômes complexes. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut ne pas avoir de racine ; par exemple, $X^2 + 1$ vu comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de racines, mais il admet bien deux racines si on le voit comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On a par contre le résultat suivant :

Proposition 14.3.8
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors

EXERCICE

Démontrer cette proposition.

En utilisant cette propriété, et en factorisant un polynôme réel sur $\mathbb{C}$, on peut en déduire en rassemblant les racines conjuguées une factorisation sur $\mathbb{R}$.

*. Jean Le Rond d'Alembert, 1717 – 1783, Français

EXEMPLE

Soit $P = X^4 + 1$. Alors, sur $\mathbb{C}$, les racines de P sont
On a donc

$$P =$$
$$=$$
$$=$$

14.3.2 Relations coefficients-racines

Nous travaillons dans cette section avec des polynômes complexes (ou des polynômes réels pouvant s'écrire comme produit de polynômes de degré 1).

Si P est de degré 2, on peut écrire, si r_1 et r_2 sont les racines de P :

$$P = aX^2 + bX + c = a(X - r - 1)(X - r_2) = aX^2 - a(r_1 + r_2)X + ar_1r_2.$$

En identifiant les coefficients, on a donc

$$r_1 + r_2 =$$
$$r_1r_2 =$$

Faisons la même chose si P est de degré 3 :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3).$$

En développant et en identifiant, on a donc

$$r_1 + r_2 + r_3 =$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 =$$
$$r_1r_2r_3 =$$

De façon générale, on peut énoncer :

Proposition 14.3.9
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un polynôme complexe de degré n, et soient $r_1, \dots, r_n$ (comptées éventuellement plusieurs fois). Alors

$$\sum r_i = \qquad \text{et} \prod r_i =$$

14.4 Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

- $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
- $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
- $P(X^2) = (X^2+1)P$

Exercice 2. On définit une suite de polynômes $(P_n)_n$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n,\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{4}X^2\right) P_n \end{cases}$$

a) Calculer P_2 et P_3.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.

  i. Donner les valeurs de a_i pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

  ii. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n.$$

  iii. En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis le degré du polynôme P_n.

Exercice 3. Factoriser les polynômes suivants :

a) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

c) $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

d) $X^6 - 3X^5 + 2X^4 - x^2 + 3X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, sachant que i est racine complexe

Exercice 4. Montrer que $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k}!$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 5. Déterminer le nombre de racines réelles de

$$P_n = nx^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1.$$

Exercice 6. Montrer qu'un polynôme complexe non constant est surjectif.

Exercice 7. Montrer qu'un polynôme complexe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \in \mathbb{R}$ est en fait à coefficients réels.

Exercice 8. On considère l'ensemble de polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$E = \{a(X^2 - bX + 1) \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

a) Montrer que pour tout polynôme non nul de E, ses racines sont inverses l'une de l'autre.

b) À quelle condition sur $b \in \mathbb{R}$ ne peut-on pas factoriser $X^2 - bX + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?

c) Montrer que le produit de deux polynômes non nuls de E est un polynôme palindrome de degré 4, c'est-à-dire qu'il s'écrit

$$\alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 + \beta X + \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

d) Réciproquement, montrer que tout polynôme palindrome de degré 4 est le produit de deux polynômes non nuls de E, l'un d'eux étant unitaire.

Exercice 9. On cherche dans cet exercice à déterminer l'ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{C}[X]$ des polynômes factorisables par leur dérivée :

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ P = QP'\}.$$

a) Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}$.

b) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$, montrer que $\lambda(X - \alpha)^n$ est dans $\mathcal{E}$.

c) Soit $P \in \mathcal{E}$ non constant, et soit Q tel que $P = QP'$. On pose $n = \deg(P)$.

   i. Calculer le degré de Q.

   ii. Montrer qu'il existe α tel que

   $$P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'.$$

   iii. Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+1)}.$$

   iv. Calculer $P^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Que peut-on dire de α ?

   v. Montrer alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda(X - \alpha)^n$.

d) Conclure : déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.