Chapitre 15

Introduction aux probabilités

15.1 Vocabulaire des probabilités

15.1.1 Événements

Définition 15.1.1
On appelle univers fini [*] *On le note souvent*

On appelle événement

On appelle événement élémentaire

Proposition 15.1.2
Si Ω a n éléments, il y a alors événements élémentaires et événements.

Dans tout ce chapitre, on utilisera l'exemple suivant :

EXEMPLE

On lance deux dés, un rouge et un bleu, et on regarde les résultats.
L'univers est alors l'ensemble des couples (i, j) possibles avec

sont des événements élémentaires, et est un événement.

Si l'étude des probabilités revient donc à l'étude d'ensembles, le vocabulaire employé est différent. On donne dans le tableau suivant les principales différences :

[*]. En première année, tous les univers sont finis. On ne le précisera donc pas systématiquement.

Théorie des ensembles	Théorie des probabilités	Notation probabiliste
Ensemble fini		
Ensemble vide		
Élément de Ω		
Singleton de Ω		
Partie de Ω		
Complémentaire de A		
Intersection de A et B		
Union de A et B		
A et B disjoints		

Définition 15.1.3
Soit Ω un univers. On appelle système complet d'événements *toute famille d'événements $\{A_i \mid i \in I\}$ telle que*

-
-

EXEMPLE FONDAMENTAL

Pour tout événement A, la famille forme un système complet d'événements.

EXEMPLE

Pour nos dés, forment une partition :

-
-
-

15.1.2 Probabilités

Si en combinatoire, on se contentait de compter les cardinaux de certains événements, on veut en probabilités leur affecter une valeur entre 0 et 1, représentant la chance (ou le risque) qu'ils ont de se produire.

Définition 15.1.4
Soit Ω *un univers fini. On appelle* probabilité sur Ω *toute fonction* $\mathbb{P}$ *de* $\mathfrak{p}(\Omega)$ *dans* $[0, 1]$ *telle que*

-
-

On appelle alors espace probabilisé fini *tout couple* $(\Omega, \mathbb{P})$ *où* Ω *est un univers et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* Ω.

EXEMPLE

L'espace probabilisé associé à un lancer d'un dé à deux faces est donné par Ω =
et

Résumons les propriétés des probabilités :

Proposition 15.1.5
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soient* $A, B \in \mathfrak{p}(\Omega$*. Alors*

-
-
-
-
-
-
-
-

On a aussi la

Théorème 15.1.6 : Formule des probabilités totales
Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événements. Soit B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

En particulier, si A et B sont des événements, alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

Démonstration. Il suffit de noter que les $B \cap A_i$ sont incompatibles deux à deux, et donc

Mais

□

Théorème 15.1.7
Toute probabilité est entièrement définie par sa valeur sur les événements élémentaires.

Plus précisemment, si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$, alors

$$\mathbb{P}(A) =$$

Dans le cas où on donne la probabilité sous cette forme, on note souvent $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$. On aurait donc

$$\mathbb{P}(A) =$$

Définition 15.1.8
Avec les notations précédentes, si $\forall i, j,\ p_i = p_j$, on dit que la probabilité est , ou que le modèle est .

EXEMPLE

Dans l'exemple des deux dés, tous les événements élémentaires $\{(i, j\}$ ont la même probabilité, et on a donc une probabilité uniforme.

Proposition 15.1.9
Soit Ω fini de cardinal n muni d'une probabilité uniforme. Alors chaque événement élémentaire a une probabilité $\frac{1}{n}$, et pour tout $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) =$$

EXEMPLE

Pour nos deux dés, la probabilité d'avoir une paire est

15.2 Probabilités conditionnelles

Si on sait déjà qu'un événement s'est produit, il peut y avoir une influcence sur les probabilités des autres événements.

EXEMPLE

Reprenons nos dés, et regardons la probabilité de l'événement "Les deux dés ont un résultat pair". La probabilité de cet événement est de , mais si on sait déjà que le dé rouge a donné 3, alors la probabilité passe à . C'est ce genre de phénomène qu'on veut modéliser.

Proposition – Définition 15.2.1
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Alors l'application

est une probabilité sur Ω.

Cette probabilité s'appelle
, ou .

Démonstration. Il suffit de vérifier les différents points : soit $A, C \in \mathfrak{p}(\Omega)$ disjoints.

- On a $A \cap B \subseteq B$, donc
- On a $\mathbb{P}_B(\Omega) =$

- On a

$$\mathbb{P}_B(A \cup C) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

□

NOTA

On trouvera aussi la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour désigner $\mathbb{P}_B(A)$.

On peut reformuler la formule des probabilités totales.

Proposition 15.2.2 : Formule des probabilités composées
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω. Alors

- *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$,*

- *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$,*

Proposition 15.2.3
Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système complet d'événements. Soit B un événément, chaque A_i ayant une probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

En particulier, si A et B sont des événements, alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

Proposition 15.2.4 : Formule des probabilités composées
Soient A_1, A_2, …, A_n des événements d'un espace probabilisé.

On suppose $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors

$$trouPP\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

NOTA

En supposant $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on montre bien que toutes les probabilités conditionnelles existent bien ; par exemple

Démonstration. Par récurrence sur n :

- si $n = 2$,
- supposons la formule vraie pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$, et soit $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) =$$

$$=$$

$$=$$

□

On utilise cette formule quand on est face à un problème en plusieurs étapes, chacune influençant la suivante.

EXERCICE

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On en tire successivement 4 successivement, sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré quatre boules rouges ?

Proposition 15.2.5 : Formule de Bayes
Soient A et B de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_A(B) =$$

EXERCICE

Une maladie touche une personne sur mille. On dispose d'un test fiable à 99%, c'est-à-dire qui à une probabilité 0.99 d'être positif pour une personne malade, et 0.99% d'être négatif pour une personne saine.
Vous passez le test, et il est positif. Doit-on s'inquiéter ?

15.3 Indépendance

Définition 15.3.1
Deux événements A et B d'un espace probabilité sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) =$$

NOTA

Attention, c'est la définition d'indépendance. En particulier, notre intuition a tendance à ne pas voir l'indépendance ou la non-indépendance d'événements. On s'obligera donc à calculer ces probabilités pour en vérifier l'égalité.

Proposition 15.3.2
Soient A et B de probabilité non nulle. Alors ils sont indépendants si

L'indépendance et l'incompatibilité n'ont rien à voir. Par exemple :

- il existe des événements indépendants, pas incompatibles :
- il existe des événements indépendants, incompatibles :
- il existe des événements pas indépendants, incompatibles :
- il existe des événements pas indépendants, pas incompatibles :

Définition 15.3.3
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$,

On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si

NOTA

Attention, l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

EXEMPLE

Toujours avec nos dés : on prend A_1 : le dé rouge est pair, A_2 : le dé noir est pair, A_3 : la somme est imapire.

On a alors

donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants, mais pour tous i, j

15.4 Exercices

Exercice 1. a) Soient $u, v \in \mathbb{R}^+$. Montrer que

$$|u - v| \leqslant \max(u, v).$$

b) Soient $u, v \in \mathbb{R}^+$ tels que $u + v \leqslant 1$. Montrer que $uv \leqslant \frac{1}{4}$.

c) Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A, B \in \mathfrak{p}(\Omega)$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 2. Paradoxe des anniversaires.

On a n personnes toutes nées une année non bissextile. Quelle valeur de n doit-on choisir pour que deux personnes aient la même anniversaire avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$? à $\frac{99}{100}$?

Exercice 3. Un concierge possède 10 clefs sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit au hasard une clef dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X_k l'événement "Il oure la porte au k-ième essai".

a) Calculer $\mathbb{P}(X_k)$ s'il essaye les clefs sans remise.

b) Calculer $\mathbb{P}(X_k)$ s'il essaye les clefs avec remise.

c) Le concierge essaye les clefs sans remise s'il est sobre, et avec s'il est ivre. On sait qu'il est ivre un jour sur trois.

   i. Il a eu besoin de 6 essais pour ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

   ii. Et s'il a eu besoin de 11 essais ?

Exercice 4. Pour préserver l'anonymat dans des sondages (avec réponse oui ou non), on peut utiliser la méthode suivante : le sondé lance une pièce, et

- s'il obtient "face", il répond oui
- sinon, il répond honnêtement.

Le sondeur ne connait pas le résultat du lancé de pièce.

On utilise cette méthode pour savoir si les personnes sondées consomment de la drogue. On estime à p la probabilité qu'une personne choisie au hasard en consomme.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard réponde "oui"au sondage ?

b) Une personne répond "oui"au sondage. Quelle est la probabilité qu'elle consomme effectivement de la drogue ?

Exercice 5. Une famille a des enfants. On note A l'événement "il y a des enfants des deux sexes" et B "il y a a plus une fille".

a) A et B sont-ils indépendants s'il y a deux enfants ?

b) s'il y a trois enfants ?

c) s'il y a $n \geqslant 2$ enfants ?

Exercice 6. Paradoxe de Monty Hall.

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Doit-il changer d'avis, et ouvrir la troisième porte ?

Exercice 7. Une princesse est retenue prisonnière dans un château. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive devant le château, il se retrouve devant trois portes et en ouvre une au hasard

- s'il ouvre la première porte alors il délivre la princesse ;
- s'il ouvre la deuxième porte alors un dragon apparaît et le dévore ;
- s'il ouvre la troisème porte alors une sorcière lui fait boire un philtre, il oublie tout ce qu'il a vu et est mis à la porte du château.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il meure ou délivre la princesse, ou après la N-ième tentative, $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer la probabilité que le prince délivre la princesse.

b) On appelle T_k l'événement "L'expérience s'arrête exactement après la k-ième tentative". Calculer la probabilité de T_k pour tout k.

Exercice 8. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. On note X_0 l'événement "On n'obtient jamais de boule noire" et pour $i \geqslant 1$, X_i l'événément "La première boule noire est obtenue au i-ième tirage". L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement "Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches", et on note $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$

b) Étudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.

c) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$

puis démontrer que la suite $(-\ln(u_n))$ est convergente.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k) = 1 - \mathbb{P}(B_n).$$

Répondre alors au problème posé.