Chapitre 2

Nombres Entiers et Réels

2.1 Nombres entiers et récurrence

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, *i.e.* l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls. De la même façon, on notera $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ et } \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

On notera aussi $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, *i.e.* l'ensemble des entiers positifs ou négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Une propriété importante des entiers naturels est la suivante :

Proposition 2.1.1
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet *, et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet*

Cette propriété peut servir [*] à démontrer le théorème de récurrence :

Théorème 2.1.2 : de récurrence
Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$. Alors si

-
-

[*]. On ne le fera pas, mais *vous* pouvez le faire

alors

On donne dans les exemples suivants (à connaître par cœur) une rédaction possible pour appliquer ce théorème.

EXEMPLE

On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Soit $\varphi(n)$ la propriété « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ». On a alors

- *Initialisation :* On a bien $\varphi(0)$, car
- *Hérédité :* Soit n un entier naturel. On suppose $\varphi(n)$, et on montre $\varphi(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k =$$

$$=$$ par hypothèse

$$=$$

Donc $\varphi(n+1)$.

Par le théorème de récurrence, on a bien , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad .$$

EXEMPLE

Soit q un réel tel que $q \neq 1$. On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Soit $\varphi(n)$ la propriété « $\sum_{k=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ». On a alors

- *Initialisation :* On a bien $\varphi(0)$, car

- *Hérédité :* Soit n un entier naturel. On suppose $\varphi(n)$, et on montre $\varphi(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k =$$

$$= \qquad \text{par hypothèse}$$

$$=$$

Donc $\varphi(n+1)$.

Par le théorème de récurrence, on a bien , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad .$$

On peut aussi voir des *variantes* de ce théorème ; on va en voir deux.

Proposition 2.1.3 : Récurrence double
Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$. Alors si

-
-

alors

EXEMPLE

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

On veut montrer la propriété φ suivante pour tout n

$$\varphi(n) = « u_n = 2^n + 3^n ».$$

- On a bien

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$. On a alors

$$u_{n+2} = \\ = \\ = \\ =$$

D'où $\varphi(n+2)$.

Par récurrence double, on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n.$$

Proposition 2.1.4 : Récurrence forte

Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$. Alors si

-
-

alors

EXEMPLE

Montrons que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

- C'est clairement vrai pour $n = 2$.
- Soit maintenant $n > 2$. Supposons que pour tout $k < n$, k admet un diviseur premier. Alors deux cas se présentent
  - Soit n est lui-même premier, et dans ce cas,
  - Soit n ne l'est pas, et on peut écrire $n = ab$, où a et b sont deux entiers entre 2 et $n-1$.

Par récurrence forte, on a donc bien montré que tout entier plus grand que 2 admet un diviseur premier.

2.2 Le corps ordonné des réels

Dans la suite, on appellera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels [†]. On dit que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné, c'est-à-dire un ensemble de nombre avec deux opérations ($+$ et $\times$) inversibles, et une relation d'ordre ($\leqslant$).

2.2.1 Inégalités et intervalles

On peut commencer par définir les différentes relations d'ordre :

Définition 2.2.1
Soient x et y deux réels. On notera

- $x \leqslant y$ *pour*
- $x < y$ *pour*
- $x \geqslant y$ *pour* , *et* $x > y$ *pour*

On définit alors un certain nombre d'ensembles, qu'on appelle *intervalles*.

Définition 2.2.2
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont les intervalles de $\mathbb{R}$:

- $[a, b] =$
- $]a, b] =$
- $[a, b[=$
- $]a, b[=$
- $]-\infty, b] =$
- $]-\infty, b[=$
- $[a, \infty[=$
- $]a, \infty[=$
- $]-\infty, +\infty[=$

On rappelle les règles suivantes sur les inégalités :

†. qui est un ensemble très compliqué à définir. On s'en passera donc

Proposition 2.2.3
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a alors

- $a \leqslant b \Leftrightarrow$
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors*
- *Si $c > 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow$*
- *Si $c < 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow$*

De façon plus générale, on a

Proposition 2.2.4
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, I étant un intervalle contenant a et b. Alors

- *Si f est croissante (resp. décroissante), alors*
- *Si f est strictement croissante (resp. décroissante), alors*

EXEMPLE

En particulier, si $0 < x \leqslant y$ (ou si $x \leqslant y < 0$), alors

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{y}.$$

2.2.2 Bornes d'un ensemble

Définition 2.2.5
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *On dit qu'un réel M* majore *A (ou est* un majorant de *A) si*
- *On dit qu'un réel m* minore *A (ou est* un minorant de *A) si*
- *On dit qu'un réel M est un* maximum de *A si*
- *On dit qu'un réel m est un* minimum de *A si*

EXEMPLE

On considère l'ensemble $A =]0, 1]$. Alors sont des majorants de A. est un maximum de A.

sont des minorants de A, mais aucun n'est un minimum.

NOTA

Attention, une partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément de majorant, minorant, maximum, minimum.

Définition 2.2.6
Soit A un ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$. S'il existe, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) de A *le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A.*

On note $\sup A$ *(resp.* $\inf A$*) la borne supérieure (resp. inférieure) de A.*

EXEMPLE

Reprenons $A =]0, 1]$. Alors les majorants de A sont
Le minimum de cet ensemble est , et donc est la
de A.
De la même façon, 0 est sa

Théorème 2.2.7 : de la borne supérieure (admis)
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$

2.2.3 Quelques fonctions à connaître

Valeur absolue

Définition 2.2.8
On appelle valeur absolue *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

NOTA

On peut aussi la définir comme

EXEMPLE

On aura par exemple $|1| =$, $|-1| =$.

Proposition 2.2.9
La valeur absolue à plusieurs propriétés importantes :

-
-
-

Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire est non triviale. Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} |x+y| &= \\ &\leqslant \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

□

La valeur absolue sert en particulier à mesurer des distances : si x et y sont deux réels, alors $|x-y|$ correspond à la distance entre les points X et Y d'abcisses respectives x et y sur la droite réelle.

Ceci nous permet de comprendre la propriété suivante :

Proposition 2.2.10
Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors

Partie entière

Proposition – Définition 2.2.11
Pour tout réel x, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

Ce réel s'appelle alors partie entière de x*, notée* $\lfloor x \rfloor$.

La partie entière est donc le plus grand entier qui soit inférieur à x.

EXEMPLE

On a par exemple $\lfloor 1,2 \rfloor =$, $\lfloor 2 \rfloor =$ et $\lfloor -1,1 \rfloor =$.

EXERCICE

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Fonctions puissance

Définition 2.2.12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. On appelle* fonction puissance n-ième *la fonction*

Si $n \in \mathbb{Z}^*$*, on appelle* fonction puissance n-ième *la fonction*

NOTA

Par convention, on prendra $x^0 =$ pour tout x non nul (et même parfois $0^0 = 1$).

Proposition 2.2.13
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *(éventuellement* $\mathbb{R}^*$*) et* $n, m \in \mathbb{Z}^*$*. Alors*

-

-

-

-

Proposition 2.2.14 : Identités remarquables
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $(x+y)^2 =$, $(x-y)^2 =$
  $x^2 - y^2 =$
- $(x+y)^3 =$,
  $(x-y)^3 =$,
  $x^3 - y^3 =$

Fonction racine carrée

Proposition 2.2.15
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, tel que

Définition 2.2.16
La fonction

$$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est bien définie, et est appellée fonction racine carrée.

Proposition 2.2.17
La fonction racine carrée vérifie les propriétés suivantes :

-
-
-

2.3 Exercices

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 2,\ u_1 = 3,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1.$$

Exercice 2. Une grenouille monte un escalier de n marches, en faisant des bonds de 1 ou 2 marches.

De combien de façon peut-elle atteindre le sommet de l'escalier si $n = 4$? $n = 10$? $n = 20$?

Exercice 3. Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 4. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose

$$B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$$

a) Montrer que B est non vide et borné.

b) Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

c) Montrer que B admet un minimum, et le déterminer.

Exercice 5. Montrer que pour tous $x, y \in R$,

$$|x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y| \leqslant 2(|x| + |y|).$$

Exercice 6. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Exercice 7. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 8. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

b) En déduire la partie entière de $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}}$.