Chapitre 4

Nombres Complexes

4.1 Le corps des nombres complexes

Proposition – Définition 4.1.1
Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

-
-
-
-

Les opérations sur $\mathbb{C}$ sont donc définies de la façon suivante :

- $(a + ib) + (c + id) =$
- $(a + ib) \times (c + id) =$

Définition 4.1.2
Soit $z \in \mathbb{C}$, qui s'écrit $z = a + ib$. Alors

- *a s'appelle la , et on note $a = \Re(z)$ ou*

- *b s'appelle la , et on note $b = \Im(z)$ ou*

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle sera appelé ,
et un nombre complexe dont la partie réelle est nulle sera appelé

On notera l'ensemble des imaginaires purs.

La décomposition $z = a + ib$ est appellée

Proposition 4.1.3
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$z = z' \Leftrightarrow$$

Proposition 4.1.4
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $\Re(z + z') =$ *et* $\Im(z + z') =$
- $\Re(\lambda z) =$ *et* $\Im(\lambda z) =$

Définition 4.1.5
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par

$$\overline{z} =$$

Proposition 4.1.6
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\Re(z) = \qquad \text{et } \Im(z) =$$

De plus,

- *z est un nombre réel si et seulement si*
- *z est un imaginaire pur si et seulement si*

Démonstration. Il suffit de poser $z = a + ib$, et de faire les calculs. □

Proposition 4.1.7
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $\overline{z+z'} =$
- $\overline{zz'} =$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$
- $\overline{\lambda z} =$

Démonstration. Là encore, il suffit d'écrire $z = a + ib$ et de faire les calculs. □

4.2 Nombres complexes et trigonométrie

4.2.1 Module

Proposition – Définition 4.2.1
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$.

On appelle alors *la quantité*

$$|z| =$$

On note alors qu'en repassant à la forme algébrique, on a donc

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| =$$

Proposition 4.2.2
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

- $|zz'| =$
- $\left|\frac{1}{z}\right| =$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| =$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ |z^n| =$
- $|\overline{z}| =$

Proposition 4.2.3
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

Démonstration. En notant $z = a + ib$ la forme algébrique de z, on a $|\Re(z)|^2 = a^2$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$, et l'inégalité est triviale. □

Proposition 4.2.4 : Inégalité triangulaire
Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

Démonstration. Si $z' = 0$, alors c'est évident. Sinon, posons $u =$. En divisant tout par $|z'|$ et en élevant au carré, on veut donc montrer que

Or

$\square$

4.2.2 Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition 4.2.5
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ par

$$e^{i\theta} =$$

Lemme 4.2.6
Soient a, b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

Démonstration. On a nécessairement $b \in [-1, 1]$, et donc on peut poser $\theta =$

On a donc $b =$, et donc $a^2 =$ Comme $\cos(\theta) \geqslant 0$, deux cas se présentent alors

- si $a \geqslant 0$, alors on a bien $a =$, et le lemme est prouvé.
- sinon, on a alors $a =$. On a alors aussi $b =$, et on a à nouveau prouvé le lemme.

$\square$

Proposition 4.2.7
Tous les nombres de la forme $e^{i\theta}$ sont de module 1. Réciproquement, tous les nombres complexes de module 1 s'écrivent sous cette forme.

Autrement dit, en notant $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, on a

$$\mathbb{U} =$$

Démonstration. Soit donc $z = a + ib \in \mathbb{U}$. On a donc $a^2 + b^2 = 1$, et on peut donc écrire $z =$ par le lemme précédent.

Réciproquement, si $\theta \in \mathbb{R}$, alors $\left|e^{i\theta}\right| =$. $\square$

Regardons maintenant quelques propriétés de l'exponentielle complexe, justifiant cette notation.

Proposition 4.2.8
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. *Alors*

- $e^{i(t+t')} =$
- $e^{-it} =$
- $e^{i(t-t')} =$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ e^{int} =$

Démonstration. Il suffit de vérifier la première propriété, toutes les autres en découlant facilement. On a

$$\begin{aligned} e^{it}e^{it'} &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

La deuxième propriété se montre en prenant $t' = -t$, et la dernière par récurrence. □

Proposition 4.2.9
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. *Alors*

$e^{it} = 0 \Leftrightarrow$ *et* $e^{it} = e^{it'} \Leftrightarrow$

Voyons maintenant les célèbres formules d'Euler et de Moivre.

Théorème 4.2.10 : Formules d'Euler *
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, *on a*

Démonstration. Il suffit de développer les exponentielles, et d'utiliser la parité du cosinus et l'imparité du sinus. □

Théorème 4.2.11 : Formule de Moivre †
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$. *Alors*

---

*. Leonhard Euler, 1707 – 1783, Suisse
†. Abraham de Moivre, 1667 – 1754, Français

Démonstration. C'est en fait exactement la dernière propriété de l'exponentielle complexe vue précédemment. □

4.2.3 Argument

Commençons par noter que pour tout nombre complexe non nul z, le nombre $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 : il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Définition 4.2.12
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *tout réel θ tel que*

NOTA

Attention ! Il n'y a pas unicité de l'argument. On notera quand même abusivement

$$\theta = \arg(z).$$

Proposition 4.2.13
Si θ est un argument d'un nombre complexe z, alors tous les arguments de z sont de la forme

NOTA

On demandera donc souvent des arguments simples ; par exemple dans $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$.

MÉTHODE :

Pour trouver l'argument d'un nombre complexe z, on peut

-

-

•

EXEMPLE

Cherchons un argument de $z = 1 + i$.

•

•

• On reconnaît alors

Un argument de $1 + i$ est donc

Dans la proposition suivante, seule la méthode de preuve, appelée *méthode de l'angle moitié*, est importante.

Proposition 4.2.14
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. Alors un argument de $e^{it} + e^{it'}$ est

Démonstration. Posons $z = e^{it} + e^{it'}$. Dans z, factorisons par l'exponentielle de l'angle moitié

$$z =$$

$$=$$

$$=$$

□

EXERCICE

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner un argument de $e^{i\theta} + 1$.

4.2.4 Formes exponentielles et trigonométriques d'un nombre complexe

Définition 4.2.15
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme exponen-

tielle *de* z *la décomposition*

$$z =$$

et forme trigonométrique *la décomposition*

$$z =$$

NOTA

La forme exponentielle est particulièrement adaptée aux calculs de produits, quotients et puissances de nombres complexes. En revanche, elle est presque inutilisable pour des calculs de sommes.
Un cas où l'on sait calculer une somme est le cas vu précédemment avec la méthode de l'angle moitié.

EXERCICE

Donner la forme trigonométrique de $e^{it} + e^{it'}$ et de $e^{it} - e^{it'}$, avec $t, t' \in \mathbb{R}$.

NOTA

Attention, une décomposition de la forme

$$z = re^{i\theta}$$

n'est pas une forme trigonométrique si r n'est pas strictement positif.

Proposition 4.2.16
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ deux nombres complexes respectivement de modules r_1, r_2 et d'arguments θ_1, θ_2. Alors

- *une forme trigonométrique de $z_1 z_2$ est*

$$z_1 z_2 =$$

- *une forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ est*

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

- *pour tout $n \in \mathbb{Z}$, une forme trigonométrique de z_1^n est*

$$z_1^n =$$

4.3 Nombres complexes et géométrie

Les nombres complexes étant essentiellement définis par un couple de nombres réels (parties réelles et imaginaires), il semble envisageable de les représenter comme des points du plan.

Définition 4.3.1
Soient $z \in \mathbb{C}$ et M le point du plan de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$.

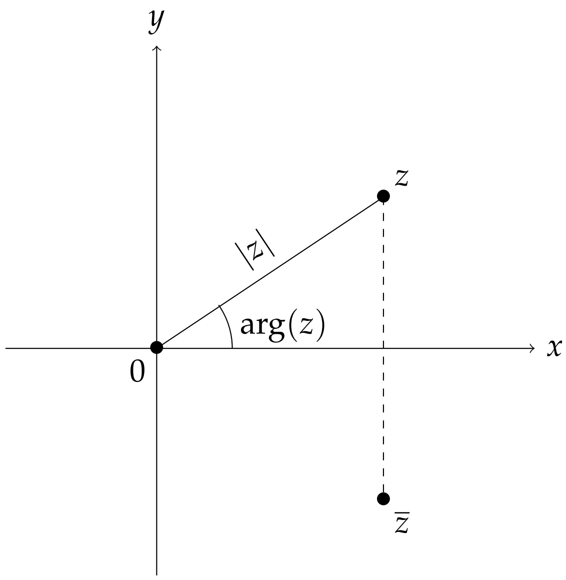
z est alors appelé de M, et M est appelé de z.

La correspondance entre points du plan et nombres complexes étant biunivoque, on confondra abusivement les deux.

On notera 0 l'origine du repère, *i.e.* le nombre complexe 0.

Soient maintenant $z, z' \in \mathbb{C}$ d'images M et M', et $\lambda \in \mathbb{R}$. Regardons un peu les résultats géométriques associés aux résultats algébriques.

Nombres complexes	Géométrie



4.4 Exponentielle d'un nombre complexe

Nous avons défini l'exponentielle d'un nombre complexe imaginaire pur : c'est le nombre complexe de module 1 et d'argument la partie imaginaire du complexe.

Essayons maintenant d'étendre cette construction à tous les nombres complexes.

Soit donc $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si on veut garder les propriétés usuelles de l'exponentielle réelle, on aura nécessairement

$$e^z = e^a e^{ib}.$$

Cette formule fait alors une parfaite définition de l'exponentielle complexe.

Définition 4.4.1
*Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'*exponentielle *de z comme le nombre complexe de module et d'argument :*

$$e^z =$$

Vérifions alors quelques propriétés :

Proposition 4.4.2
L'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :

•

-

-

Démonstration. • Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|e^z| =$. L'exponentielle réelle ne s'annulant pas, e^z a un module non nul, et donc est non nul.

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques. Alors

$$e^{z+z'} = \\ = \\ =$$

- On prend dans le résultat précédent.

□

Proposition 4.4.3
Les solutions complexes de l'équation $e^z = 1$ sont exactement les

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant l'équation. Alors en passant au module, on a

,

et donc . Donc z est

Or on sait déjà que $e^{it} = 1$ si et seulement si

Réciproquement, □

Proposition 4.4.4
Tout nombre complexe non nul admet un antécédent[‡] *par l'exponentielle complexe :*

Démonstration. Posons $a = re^{i\theta}$ la forme trigonométrique de a, et posons . Alors il est clair que z convient. □

MÉTHODE : Résolution de $e^z = a$

> Soit $a \in \mathbb{C}^*$ fixé. On veut résoudre $e^z = a$.

‡. pas du tout unique

-
-
-

EXEMPLE

Résolvons l'équation $e^z = 2i$. Commençons par noter que

$$2i =$$

L'équation devient donc

et donc les solutions sont du type

4.5 Applications des nombres complexes

4.5.1 Linéarisation, délinéarisation

L'idée ici est de transformer des puissances de sinus et cosinus en sinus et cosinus de multiples, en utilisant la formule d'Euler. Cette transformation de *linéarisation* est utile pour trouver par exemple des primitives de fonctions trigonométriques.

MÉTHODE : Linéarisation

On veut linéariser une fonction de la forme $\cos^m$

- On écrit la formule d'Euler :

$$\cos^m(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^m$$

- On développe la puissance avec des identités remarquables.

- $\cos^m(x)$ étant réel, il est égal à sa partie réelle.

EXEMPLE

Linéarisons $\cos^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

MÉTHODE : Linéarisation

On veut linéariser une fonction de la forme $\sin^m$

- On écrit la formule d'Euler :

$$\sin^m(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^m = \frac{(-1)^m i^m}{2^m}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^m$$

- On développe la puissance avec des identités remarquables.
- $\sin^m(x)$ étant réel, il est égal à sa partie réelle.

EXEMPLE

Linéarisons $\sin^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

NOTA

On peut de la même façon linéariser des fonctions de la forme $\cos^n(x)\sin^m(x)$.

L'opération inverse [§] est aussi possible, cette fois avec la formule de Moivre :

$$\cos(m\theta) + i\sin(m\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^m .$$

Il suffit donc, pour trouver $\cos(m\theta)$ et $\sin(m\theta)$ de développer la partie de droite, et de prendre les parties réelles et imaginaires.

EXEMPLE

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
La formule de Moivre nous donne

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= \\ &= \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\cos(3x) =$$

4.5.2 Équations du second degré

Nous savons pour l'instant résoudre des équations du second degré à coefficients réels quand le discriminant est positif. Dans le cas négatif, il n'y a pas de solutions réelles, mais qu'en est-il pour les complexes ?

Commençons par un cas simple.

Proposition 4.5.1
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $z^2 = a$ admet pour solutions :

-
-
-

§. Le mot "délinéarisation" n'existe évidemment pas

Démonstration. Les deux premiers cas sont déjà connus. Pour le dernier, il suffit de noter que $a = (i\sqrt{-a})^2$, et donc en factorisant, l'équation devient

□

Considérons l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$$

En utilisant la forme canonique, on arrive à l'équation

autrement dit

On arrive dans le cas simple précédent : si le second membre est positif ou nul, on retrouve les solutions réelles classiques.

S'il est strictement négatif, on a alors

et on trouve les solutions

$$z =$$

Résumons avec un tableau :

Proposition 4.5.2
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont données par, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Signe de Δ	*Solutions de l'équation*
$= 0$	
> 0	
< 0	

On note que dans tous les cas, la somme des racines est toujours égale à $-\frac{b}{a}$ et le produit des racines à $\frac{c}{a}$. Plus précisemment :

Proposition 4.5.3
z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

Démonstration. On vient de voir le sens direct. Réciproquement, considérons z_1 et z_2 vérifiant les conditions données.

Alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation , qui se développe justement en

Une multiplication par a permet de retrouver l'équation voulue. □

NOTA

Quand on utilise le sens réciproque, on utilisera presque toujours le cas $a = 1$: deux nombres vérifiant $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$ sont exactement les solutions de

Pour résoudre des équations du second degré à coefficients complexes, on pourra s'inspirer de la méthode précédente : toutes les étapes sont valides jusqu'à

mais le second terme étant complexe, on ne peut plus en prendre la racine carrée.

On verra alors dans la section suivante que pour tout complexe non nul z, il existe exactement deux complexes z_1 et z_2 tels que $z_1^2 = z_2^2 = z$.

En trouvant δ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$, on pourrait poursuivre le raisonnement précédent pour trouver les racines
$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

4.6 Racines n-ièmes de l'unité

Si les résultats qui suivent sont hors-programme, il sont en revanche très classiques, et il est donc important de connaître les résultats.

Définition 4.6.1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité *tout complexe z tel que*

EXEMPLE

1 et -1 sont donc des racines deuxième de l'unité.

Ce sont en fait les deux seules : on peut réécrire $z^2 = 1$ en $z^2 = 1^2$, et on cherche alors les racines de $(z-1)(z+1) = 0$.

EXERCICE

Chercher les racines troisièmes de l'unité.
On pourra utiliser l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Proposition 4.6.2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, données par

$$\xi_k =$$

Démonstration. Soit z une solution de $z^n = 1$. On commence par noter que nécessairement, $|z| = 1$; alors en écrivant sous forme exponentielle $z = e^{i\theta}$, on trouve $e^{in\theta} = 1$, et on sait alors que nécessairement $n\theta = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Toutes les racines n-ièmes de l'unité sont donc de la forme ξ^k, $k \in \mathbb{Z}$ où $\xi = e^{2i\pi/n}$.

Soit maintenant un $k \in \mathbb{Z}$, et faisons la division euclidienne de k par n : $k = qn + r$, $0 \leqslant r < n$.

Alors $\xi^k = (\xi^n)^q \, \xi^r = \xi^r$, et il suffit donc de considérer les puissances entre 0 et $n-1$. □

On note en particulier que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut toujours 1 :

$$\xi^0 + \xi^1 + \cdots + \xi^{n-1} = \frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} = 0.$$

4.7 Exercices

Exercice 1. Donner les parties réelles et imaginaires des complexes suivants :

- $\frac{1-3i}{1+3i}$
- $(i-\sqrt{2})^3$
- $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$
- $\frac{1}{\frac{1}{1+i}-1}$
- $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$
- $(i+1)^{2018}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\overline{z}$.

Exercice 3. Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$. Montrer que

$$|1+a|+|a+b|+|b|\geqslant 1.$$

Exercice 4. Soient u et v deux complexes. On pose $z=u+iv$. Donner une condition *nécessaire et suffisante* sur u et v pour qu'on ait

$$|z|^2=u^2+v^2.$$

Exercice 5. Soient $a,b\in\mathbb{C}$, et soit $c=\frac{a-b}{1-\overline{a}b}$. Montrer que $|c|=1$ *si et seulement si* $|a|=1$ ou $|b|=1$.

Exercice 6. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants (θ est un paramètre réel de $]-\pi,\pi]$) :

- i
- $(1+i)^{12}$
- $\frac{1}{\frac{i}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}$
- $1+e^{i\theta}$
- $1-e^{i\theta}$
- $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}$

Exercice 7. Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ. Montrer que

$$(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\cdots(z^n+\overline{z}^n)$$

est réel, et le calculer en fonction de ρ et θ.

Exercice 8. Linéariser $\cos^4(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(x)\sin^3(x)$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et mettre les résultats sous forme exponentielle :

- $z^2+z+1=0$
- $z^4+z^2+1=0$
- $z^2+2(1-\cos(u))z+2(1-\cos(u))=0$ ($u\in]0,\pi[$)

Exercice 10. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Posons $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $s=a+a^4$ et $t=a^2+a^3$.

(i) Calculer ST et $S+T$.

(ii) En déduire la valeur souhaitée.