Chapitre 5

Calculs de sommes et produits

5.1 Un peu de dénombrement

Nous découvrirons plus tard un chapitre entier dédié au dénombrement, nous allons dès maintenant introduire ou rappeler quelques notions.

Définition 5.1.1
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la factorielle de n *par récurrence :*

$$n! =$$

On a donc, informellement, $n! =$

EXEMPLE

On a par exemple $4! =$, $10! =$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+2)!}{n!} =$$

EXERCICE

Simplifier autant que possible pour tout $n \geqslant 1$ la quantité $\frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!}$.

On verra plus tard que $n!$ représente le nombre de façons de ranger k éléments distincts dans k boîtes.

Définition 5.1.2
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On appelle coefficient binomial

De façon équivalente, si $p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = C_n^p =$$

et $\binom{n}{p} =$ *sinon.*

EXEMPLE

On a $\binom{4}{2} =$.

Quelques valeurs de coefficients binomiaux doivent être connues :

Proposition 5.1.3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \quad , \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$$

Les coefficients binomiaux vérifient un grand nombre de propriétés, dont voici quelques-unes :

Proposition 5.1.4
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Alors

-

- *

-

-

Démonstration. • Il est clair que choisir k éléments parmi n

∗. Blaise Pascal, 1623 – 1662, Français

- On a
  $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$$
  $$=$$
  $$=$$
  $$=$$

- De façon combinatoire :

  Choisir k éléments, puis en choisir le chef donne possibilités. De façon équivalente, on peut choisir le chef parmi les n, puis $k-1$ parmi les $n-1$ restantes ; cela donne possibilités.

- En exercice.

$\square$

Revenons sur le triangle de Pascal : il nous permet de construire par récurrence tous les coefficients binomiaux de la façon suivante. Chaque élément est obtenu comme somme des deux éléments au-dessus.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

5.2 Calcul de sommes

Définition 5.2.1

Soient $a_p, \dots, a_n$ des nombres. On note leur somme

$$a_p + \cdots + a_n =$$

Dans tout ce chapitre, on fera bien attention : on ne parle que de sommes *finies*. Les sommes avec une infinité de termes ne seront étudiées qu'en deuxième année.

Dans toute la suite, on énoncera les résultats pour des sommes qui commencent à 1. On fait donc appel à l'intelligence du lecteur pour adapter les énoncés si la somme commence à 0, ou après 2.

Le k qui apparaît dans la définition est une *variable muette* : son nom n'importe pas. On aura donc directement

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\quad=1}^{n} a_{\quad} = \cdots$$

On prendra d'ailleurs garde, lorsque plusieurs sommes apparaissent, à utiliser des indices différents si elles doivent se rencontrer.

5.2.1 Propriétés de la somme

Proposition 5.2.2
La somme est linéaire, i.e. *pour tous nombres* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \lambda$,

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k) =$$

Attention, c'est évidemment faux pour le produit et le quotient.

Par associativité de l'addition, on peut séparer des sommes avec la relation de Chasles.

Proposition 5.2.3 : Relation de Chasles
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![1, n-1]\!]$ *et* $a_1, \dots, a_n$ *des nombres. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k =$$

EXEMPLE

C'est souvent utile dans l'autre sens, pour simplifier des sommes :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k =$$
$$=$$

On note que par commutativité et associativité de la somme, on peut séparer les sommes de plein de façons différentes.

EXEMPLE

On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k =$$

$$=$$

Tout ceci nous emmène à la transformation suivante : le changement d'indice.

Proposition 5.2.4
Soient $(a_i)_{i\in I}$ une suite de nombre indexés par un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ fini.

*Soit f une fonction injective (*i.e.* telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée n'admette qu'au plus un antécédent) de I dans $\mathbb{N}$.*

Alors en posant $J = \{f(i) \mid i \in I\}$, on a

$$\sum_{j\in J} a_j =$$

Cette proposition étant générale, mais assez compliquée, nous allons voir séparément les quelques manières usuelles de l'appliquer.

Proposition 5.2.5 : Glissement d'indice
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{j=k-1}{=}$$

$$\underset{i=k+2}{=}$$

$$\underset{\ell=k+r}{=}$$

S'il n'est pas obligé de changer le nom de la variable de sommation, c'est fortement conseillé, au moins au début, de le faire.

EXEMPLE

On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{n} \left((\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

Or par changement d'indice, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \underset{j=k+1}{=}$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\right.$$

$$=$$

La somme de l'exemple précédent rentre dans le cas plus général des *sommes téléscopiques* :

Proposition 5.2.6
Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des nombres. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) =$$

Par commutativité de la somme, on peut aussi calculer les sommes "à l'envers", en faisant une inversion d'indice.

Proposition 5.2.7
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \underset{i=n-k}{=}$$

5.2.2 Sommes usuelles

Donnons maintenant quelques résultats de sommes usuelles à connaître :

Proposition 5.2.8
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} 1 =$$

Cela revient en fait juste à (bien) compter le nombre de termes de la somme. Attention, il y a $n+1$ termes entre 0 et n.

Proposition 5.2.9

On a pour tout n :

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 =$$

Démonstration. Une simple récurrence permet de montrer toutes les formules.

Donnons une autre preuve pour la première formule : notons S la somme à calculer. Alors par inversion d'indice, on a

$$S =$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2S &= S + S \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat. □

On peut généraliser le calcul de la somme des entiers à

$$\sum_{k=p}^{n} k =$$

Proposition 5.2.10 : Sommes géométriques
Soit x un nombre différent de 1. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} x^k =$$

Plus généralement, si $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n} x^k =$$

Si $x = 1$, on retrouve une somme déjà connue.

Théorème 5.2.11 : Formule du binôme de Newton
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(a+b)^n =$$

En prenant $n = 2, 3$, on retrouve les identités remarquables connues. En prenant $a = b = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$$

Démonstration. Par récurrence sur n : si $n = 1$, c'est trivial. Sinon, supposons l'égalité vérifiée pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^{n+1} =$$

$$=$$

$$=$$

$$\underset{\ell=k+1}{=}$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

□

EXERCICE

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Proposition 5.2.12 : Identité remarquable
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

En prenant $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve les identités remaquables connues.

Démonstration. Si $b = 0$, c'est évident. Si $a = b$, aussi.

Sinon, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

On retrouve bien le résultat. □

Proposition 5.2.13 : Formule de Vandermonde †
Pour tous $p, n, m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} =$$

Démonstration. On veut choisir p objets en tout dans deux boîtes contenant respectivement n et m objets. On peut choisir

De façon équivalente, on peut se fixer un nombre k d'objets à prendre dans la première boîte, et $p-k$ dans la seconde, ce qui donne . Tous les k entre 0 et r étant possibles, on retrouve bien le résultat. □

†. Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 – 1796, Français

En particulier, si $p = n = m$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 =$$

5.2.3 Sommes doubles

On appellera somme double toute somme dont le terme général est lui-même une somme, du type

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} a_{k,\ell}.$$

EXEMPLE

On veut calculer la somme $S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij$. On a

$S =$

Il ne reste plus qu'à utiliser les résultats connus :

$S =$

Il arrive qu'on écrive une somme double avec un seul symbole $\sum$. Dans ce cas, on écrit sous la somme les indices, par exemple :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant i}} a_{i,j}, \quad \text{ou} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{i,j}.$$

La méthode la plus évidente pour le calcul d'une somme double est de calculer d'abord la somme intérieure, puis de calculer la somme du résultat trouvé.

Il arrive parfois que le calcul de la somme intérieure ou de la somme extérieure soit trop compliqué. Dans ce cas, on peut essayer d'intervertir les deux sommes. Dans le cas de sommes finies, cette interversion est toujours valide (c'est simplement la commutativité de la somme).

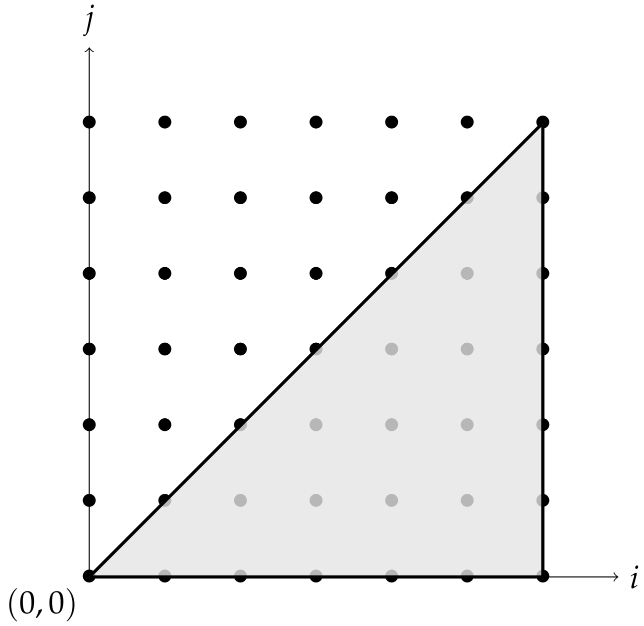
Dans le cas d'indices indépendants, *i.e.* si les bornes de la deuxième somme ne dépendent pas de l'indice de la première, on intervertit simplement :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}.$$

Dans le cas d'indices liés, il faut faire attention, et éventuellement dessiner le domaine des indices.

EXEMPLE

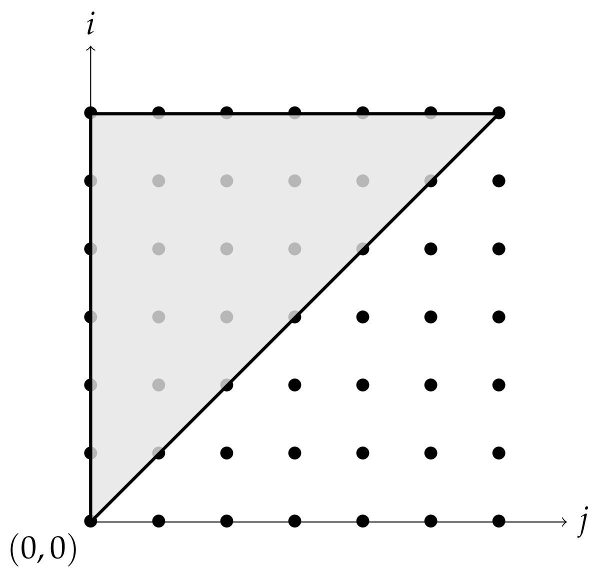
Reconsidérons la somme $S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij$. Les indices varient dans le domaine suivant :



Dessiner le domaine, puis retourner le dessin permet de voir comment doivent varier les indices dans "l'autre sens".

EXEMPLE

Toujours pour la même somme, en retournant le dessin :



j est donc compris entre 0 et n, et i entre j et n.
On aura donc

$$S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} = ij.$$

EXERCICE

Calculer la somme $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x^j$ en intervertissant les sommes.

5.3 Calculs de produits

Définition 5.3.1
Soient $a_p, \ldots, a_n$ des nombres. On note leur produit

$$a_p \times \cdots \times a_n =$$

On peut alors adapter, en remplaçant l'addition par la multiplication (et donc la soustraction par le quotient), tous les résultats sur les sommes pour les produits. On aura donc :

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i^p b_i) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i =$$

$$\vdots$$

5.4 Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme S de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 2. En utilisant les nombres complexes, calculer pour tout $x \neq 2k\pi$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

On pourra poser $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ *et calculer* $C + iS$.

Exercice 3. Calculer pour tout n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

Exercice 4. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons $(1+x)^p(1+x)^q$ et en identifiant les coefficients de x^n, retrouver la formule de Vandermonde.

Exercice 5. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta).$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 7. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Exercice 8. Calculer les produits $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 9. Pour tout réel strictement positif x, on considère la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Le but de l'exercice est de calculer cette somme.

(i) Montrer que quelque soit $x > 0$, la somme est en fait finie.

(ii) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = 0$.

(iii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(2x) = f(x) + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

(iv) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

(v) En déduire que pour tout $x \in]0, 2[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(vi) Par récurrence, montrer que pour tout n et pour tout $x \in]0, 2^n[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(vii) Conclure.

Exercice 10. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{k} 2^k,$$

calculer cette somme.

Exercice 11. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} kk!$.

Exercice 12. (i) Soient $n, p, k \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant k \leqslant n$. Montrer que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}.$$

(ii) En déduire les sommes

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k} \text{ et } \sum_{k=p}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

Exercice 13. On définit les sommes P_n et I_n par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \text{ et } I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En calculant $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$, donner les valeurs de P_n et I_n.