Chapitre 6

Généralités sur les Fonctions

6.1 Applications entre deux ensembles

6.1.1 Définitions

Définition 6.1.1
On appelle application *(ou fonction) tout objet mathématiques f défini par :*

-

-

-

On notera alors $f(x)$ l'élément y de F correspondant à $x \in E$. $f(x)$ s'appelle de x, et x s'appelle un[*] de y.

On note une telle application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} .$$

$*$. pas nécessairement unique

EXEMPLE

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

L'ensemble de départ de f est et l'ensemble d'arrivée de f est

est l'image de 2 par f, et et sont des antécédents de 4 par f.

NOTA

Attention, une application est bien définie par les trois points ; les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \text{ et } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

sont donc théoriquement différentes

NOTA

Attention à ne pas confondre f et $f(x)$: f est une application, et $f(x)$ est un élément de l'ensemble d'arrivée.

Définition 6.1.2

On dit que deux applications f et g sont égales si :

-
-
-

EXEMPLE

Les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \text{ et } g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

sont égales.

NOTA

On s'autorisera parfois à dire que deux applications sont égales même si elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

Définition 6.1.3
Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle composée de f et g *l'application*

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

NOTA

Attention, on ne peut pas parler d'application composée si l'ensemble d'arrivée de la première application et l'ensemble de départ de la seconde ne sont pas égaux.

EXEMPLE

Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \text{ et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} .$$

Alors on peut composer f et g, et

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

Définition 6.1.4
Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A \subseteq E$ et $F \subseteq G$. Alors

- *on appelle* image directe *de A par f l'ensemble*

  $f(A) =$

- *on appelle* image réciproque *de B par f l'ensemble*

$$f^{-1}(B) =$$

NOTA

Attention, la notation f^{-1} ne signifie pas que f est bijective.

L'image directe d'une partie de l'ensemble de départ est donc l'ensemble des images de cette partie, alors que l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des antécédents des élements de cette partie.

EXEMPLE

On a par exemple

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \qquad , \ \ln(]0,1[) =$$

et

$$\exp^{-1}([1,\infty[) = \qquad , \ \sin^{-1}([-3,-2]) =$$

Proposition 6.1.5
Soient $f : E \to F$ et $B \subseteq F$. Alors

$$f(f^{-1}(B)) \qquad B.$$

La réciproque est fausse.

Démonstration. Soit donc $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition d'image directe,

Par définition de $f^{-1}(B)$, on a donc , et donc $y \in B$.

Pour la réciproque, on considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

Alors

$$f(f^{-1}(\mathbb{R})) =$$

$\square$

EXERCICE À CONNAÎTRE

Soient $f : E \to F$, et $A, B \subseteq E$ et $C, D \subseteq F$. Alors

- $A \subseteq B \Rightarrow$
- $C \subseteq D \Rightarrow$
- $f(A \cup B)$
- $f^{-1}(C \cup D)$
- $f(A \cap B)$
- $f^{-1}(C \cap D)$
- $f^{-1}(C \cap D)$

6.1.2 Quelques fonctions particulières

Définition 6.1.6
Soit E un ensemble. On appelle fonction nulle*, notée 0_E, la fonction*

$$0_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0\} \\ x & \longmapsto & \end{array}.$$

Définition 6.1.7
Soit E un ensemble. On appelle identité de E *l'application notée* id_E *définie par*

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

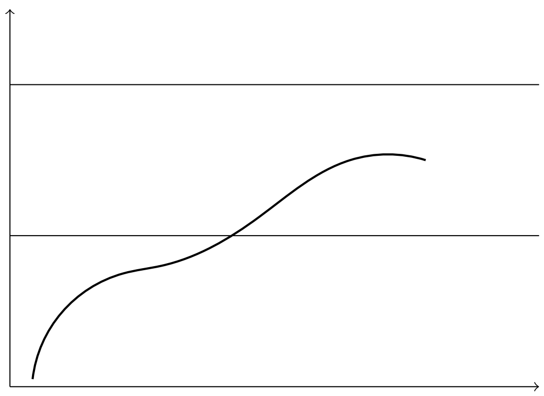
Définition 6.1.8
Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle fonction indicatrice de A dans E *l'application*

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

6.1.3 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Définition 6.1.9
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective *(ou que f est une* injection de E dans F*) si*

Autrement dit, sur un graphique, toute droite horizontale coupe zéro ou une fois la courbe de la fonction.



Si une des droites horizontales coupe la courbe au moins deux fois, alors la fonction n'est pas injective.

Proposition 6.1.10
La fonction $f : E \to F$ est injective si et seulement si

Démonstration. Supposons f injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

Supposons maintenant $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Soit z dans l'ensemble d'arrivée. Supposons qu'il admette deux antécédents distincts x et y. Alors

□

EXEMPLE

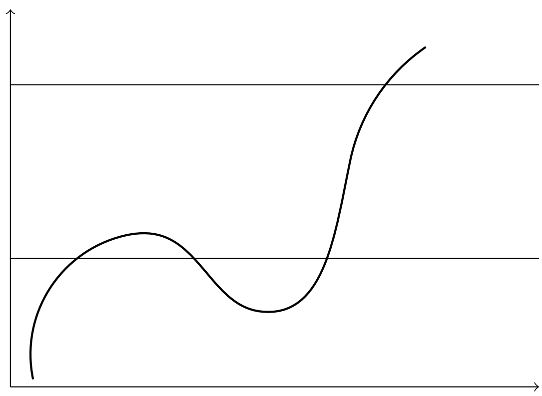
La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

Définition 6.1.11

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective *(ou que f est une* surjection de E dans F*) si*

Graphiquement, toute droite horizontale doit rencontrer au moins une fois la courbe.



Si une droite horizontale ne rencontre pas la courbe, alors la fonction n'est pas injective.

Pour montrer la surjectivité d'une fonction, on raisonnera souvent par analyse-synthèse pour trouver des antécédents.

EXERCICE

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

est surjective.

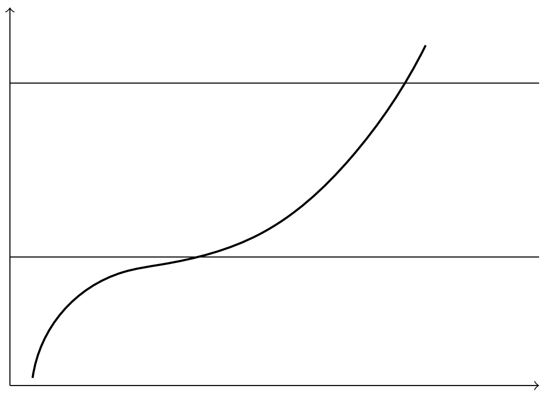
Définition 6.1.12

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective *(ou que f est une* bijection de E

dans *F) si*

Autrement dit, une fonction est bijective si et seulement si

Graphiquement, toute droite horizontale coupe une et une seule fois la courbe de la fonction.



Proposition 6.1.13
Soir $f : E \to F$. Alors f est bijective si et seulement si

Proposition – Définition 6.1.14
Si f est bijective, la fonction g est unique. On l'appelle alors réciproque de f*, notée f^{-1}.*

Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction bijective et sa réciproque ont des courbes symétriques par rapport à la première bissectrice.

Proposition 6.1.15
Si $f : E \to F$ est bijective, alors

Proposition 6.1.16
Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors

MÉTHODE :

Pour montrer qu'une fonction est bijective, on pourra au choix :

-
-

Pour montrer qu'une fonction n'est pas bijective, il suffit de

6.2 Fonctions numériques

Définition 6.2.1
On appelle fonction numérique *toute application définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.*

Pour une fonction numérique, on appelle domaine de définition

Définition 6.2.2
Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *La fonction λf est définie sur $\mathcal{D}_f$ par $(\lambda f)(x) =$.*
- *La fonction $f+g$ est définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f+g)(x) =$.*
- *La fonction fg est définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(fg)(x) =$.*
- *La fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\}$ par $(\frac{f}{g})(x) =$.*

Définition 6.2.3
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. On dit que f est

- *paire si*
- *impaire si*

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à
, et celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport

Définition 6.2.4
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est T-périodique si

Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par

L'étude de ces fonctions peut n'être fait que partiellement : il suffira d'étudier sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ les fonctions paires et impaires, et sur $[0, T[$ une fonction T-périodique.

Définition 6.2.5
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$. On dit que f est

- *croissante si*
- *décroissante si*
- *strictement croissante si*
- *strictement décroissante si*
- *monotone si*
- *strictement monotone si*
- *constante si*

Définition 6.2.6
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, et soit $A \subseteq \mathcal{D}_f$ non vide.

- *On dit que f est majorée sur A si*

  Dans ce cas, on définit la borne supérieure de f sur A par

  $$\sup_{x \in A} f(x) =$$

  Si ce nombre est atteint, i.e. *si $\exists a \in A,\ f(a) = \sup_{x \in A} f(x)$, on dit alors que $f(a)$ est le*

- *On dit que f est minorée sur A si*

  Dans ce cas, on définit la borne inférieure de f sur A par

  $$\inf_{x \in A} f(x) =$$

  Si ce nombre est atteint, i.e. *si $\exists a \in A,\ f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$, on dit alors que $f(a)$ est le*

- *On dit que f est bornée sur A si*

6.2.1 Quelques rappels sur la dérivation

Dans cette partie, on rappelle brièvement les résultats sur la dérivation des fonctions numériques vus au lycée.

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I.

Définition 6.2.7
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement

admet une limite quand $x \to a,\ x \neq a$.

Dans ce cas, cette limite s'appelle nombre dérivé de f au point a*, et se note $f'(a)$.*

NOTA

C'est équivalent à dire que le taux d'accroissement admet une limite quand $h \to 0,\ h \neq 0$.

Définition 6.2.8
On dit que f est dérivable sur *I si f est dérivable en chacun des points de I.*

Dans ce cas, on note appelle dérivée *et on note f' la fonction $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$. On trouvera aussi les notations $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou $\dot{f}$.*

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
Constante	$\mathbb{R}$	
x	$\mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R}$	
$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	
$x^n;\ n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{+*}$	
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}$	

La dérivation est préservée par un certain nombre d'opérations sur les fonctions.

Proposition 6.2.9
Si f et g sont dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- *$f+g$ est dérivable sur I, et $(f+g)' =$*
- *fg est dérivable sur I, et $(fg)' =$*
- *λf est dérivable sur I, et $(\lambda f)' =$*

- $\frac{f}{g}$ *est dérivable sur* $I \backslash \{x \mid g(x) = 0\}$*, et* $\left(\frac{f}{g}\right)' =$

De plus, on peut dériver une composition de fonction :

Théorème 6.2.10
Soient $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions, telles que* $f \in \mathcal{D}^1(I)$ *et* $g \in \mathcal{D}^1(J)$*. Alors*

Enfin, on peut dériver les réciproques.

Théorème 6.2.11
Si f *est dérivable sur* I*, et si* f *est bijective, alors*

Théorème 6.2.12
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I *et dérivable sur* I *(sauf éventuellement aux extrémités de* I*). Alors*

- f *est croissante sur* I *si et seulement si*
- f *est décroissante sur* I *si et seulement si*
- f *est constante sur* I *si et seulement si*
- *Si* $f' > 0$ *(resp.* $f' < 0$*) sur* I*, alors*

La réciproque est fausse dans le dernier point.

6.2.2 Quelques rappels sur les limites

On rappelle dans cette partie quelques propriétés sur les limites vues au lycée.

Commençons par les opérations classiques sur les limites.

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$			
	$+\infty$			
	$-\infty$			

$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$			
	0			
	$\pm\infty$			

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$			
	0			
	$\pm\infty$			

On peut montrer l'existence d'une limite avec les théorèmes suivants :

Théorème 6.2.13 : d'encadrement des limites, cas ∞
Soit $a \in \overline{R}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- *Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors , et .*
- *Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors , et .*

Théorème 6.2.14 : d'encadrement des limites, cas réel
Soient $a \in \overline{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g, h définies au voisinage de a. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a} h(x) = \ell.$$

Si au voisinage de a, $f \leqslant g \leqslant h$, alors

Enfin, énonçons les croissances comparées usuelles :

Théorème 6.2.15
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)^b}{x^a} =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^a e^{bx} =$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a \ln(x)^b =$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} =$

6.2.3 Théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection

Théorème 6.2.16 : des valeurs intermédiaires
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $k \in \mathbb{R}$. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \leqslant k$ et $f(b) \geqslant k$, alors

Théorème 6.2.17
Soit f une fonction continue sur un segment. Alors

En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Définition 6.2.18
On appelle homéomorphisme *toute fonction bijective continue dont la réciproque est continue.*

EXEMPLE

La fonction est un homéomorphisme, puisqu'elle est continue, et que sa réciproque est continue.

Théorème 6.2.19 : de la bijection
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, strictement monotone, et $J = f(I)$. Alors , et

Corollaire 6.2.20
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, strictement monotone. Soient $a, b \in I$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$,

6.3 Exercices

Exercice 1. Soit $f : A \to B$ définie par $f(x) = x^2$. Donner des exemples de $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tels que

- f soit surjective, mais pas injective
- f soit injective, mais pas surjective
- f ne soit ni injective, ni surjective
- f soit bijective.

Exercice 2. Soient f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

(i) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

(ii) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles injectives/surjectives/bijectives ?

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 4. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5. Soit $f : E \to F$. Montrer que pour toute partie A et E,

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$$

et qu'on a égalité si et seulement si f est injective.

Exercice 6. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est une bijection, et déterminer sa réciproque.

Exercice 7. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x \end{array}.$$

(i) Étudier les variations de f.

(ii) Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$ et $f([1,\infty[)$.

(iii) Déterminer $f^{-1}(]2,\infty[)$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Est-ce toujours vrai si $f :]0,1[\to]0,1[$?

Exercice 9. (i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \left[a, \frac{a+b}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t) \end{array}$$

s'annule au moins une fois.

(ii) Une personne court quatre kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demie-heure où elle court exactement deux kilomètres.

Exercice 10. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant $f \circ f = Id$.