Chapitre 8

Suites Numériques

Dans ce chapitre, on étudie des fonctions particulières : les suites.

Définition 8.0.1
On appelle suite numérique *toute application dont l'ensemble de départ est , et l'ensemble d'arrivée*

Si u est une suite, on notera au lieu de $u(n)$, et la suite sera notée ou , où I est l'ensemble de départ de u.

Comme pour les fonctions, attention à ne pas confondre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_n : le premier est une suite, l'autre un élément de $\mathbb{C}$.

Les suites pourront être définies soit explicitement (on donne alors u_n en fonction de n), soit par récurrence (on définit u_n en fonction des u_i, $i < n$).

8.1 Suites usuelles

Il faut connaître certaines familles de suites.

8.1.1 Suites arithmétiques

Définition 8.1.1
On appelle suite arithmétique de raison r *toute suite* (u_n) *vérifiant*

Une suite arithmétique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison r.

Proposition 8.1.2
Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison de* r*. Alors*

Plus généralement,

Démonstration. Par récurrence. □

Proposition 8.1.3
Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison de* r*. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et la somme des n premiers entiers. □

8.1.2 Suites géométriques

Définition 8.1.4
On appelle suite géométrique de raison r *toute suite* (u_n) *vérifiant*

Une suite arithmétique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison r.

Proposition 8.1.5
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison de* r*. Alors*

Plus généralement,

Démonstration. Par récurrence. □

Proposition 8.1.6
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison de* $r \neq 1$*. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et la somme des n premiers entiers. □

8.1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8.1.7
On appelle suite arithmético-géométrique *toute suite numérique telle que*

Attention, a et b doivent être des réels qui ne dépendent pas de n.

NOTA

On note donc que les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

MÉTHODE :

Pour trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique :

- Si $a = 1$, on est dans un cas connu. Sinon, on pose $\ell =$
- Montrer que $v_n =$ définit une suite géométrique de raison a.
- Conclure que

$$u_n =$$

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

- Posons $\ell =$.
- Soit (v_n) définie par $v_n =$. Alors pour tout n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

  (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 =$ et de raison .
- On a donc pour tout n, $v_n =$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

8.1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8.1.8
On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 *toute suite telle que*

Définition 8.1.9
Pour une telle suite, on appelle équation caractéristique *l'équation*

Proposition 8.1.10
Soit (u_n) une telle suite. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

- *Si $\Delta > 0$, soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation. Alors*

- *Si $\Delta = 0$, soit r la solution de l'équation. Alors*

- *Si $\Delta < 0$, soient $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ les solutions de l'équation. Alors*

Dans la pratique, les valeurs de α et β sont calculées grâce aux valeurs u_0 et u_1.

EXEMPLE

Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

L'équation caractéristique est alors , qui admet deux solutions réelles distinctes, $\phi =$ et $\overline{\phi} =$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n =$$

On a donc $F_0 =$, et $F_1 =$, et on calcule $\alpha =$ et $\beta =$.
On a donc pour tout n

$$F_n =$$

8.2 Propriétés des suites

Les suites étant des cas particuliers de fonctions numériques, on peut donc adapter toutes les définitions :

Définition 8.2.1
Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) est

- *majorée si*
- *minorée si*
- *bornée si*

Pour les propriétés de croissance, on peut utiliser des résultats plus simples :

Définition 8.2.2
Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) est

- *croissante si*
- *décroissante si*
- *strictement croissante si*
- *strictement décroissante si*
- *monotone si*
- *strictement monotone si*
- *constante si*
- *stationnaire si*

MÉTHODE :

Pour trouver le sens de variation d'une suite, on peut

-
-

EXEMPLE

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2 - 2n$. Alors

$u_{n+1} - u_n =$

La suite est donc .
Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \frac{n^2}{n!}$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} =$$

La suite est donc .

Dans le cas où la suite est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numériques, les propriétés de f se transmettent à (u_n) : si f est croissante, u aussi, *etc.*

8.3 Limites

Définition 8.3.1
Soit (u_n) une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si

ℓ s'appelle alors limite de la suite (u_n) *; on note*

$$\ell =$$

Une suite qui ne converge pas est dite

Intuitivement, une suite converge vers ℓ si à partir d'un certain rang, tous les termes sont aussi proches qu'on veut de ℓ.

Proposition 8.3.2
Soit (u_n) une suite numérique. Si (u_n) converge,

Proposition 8.3.3
Soit (u_n) une suite numérique. Si (u_n) converge, alors

Proposition 8.3.4
Soit (u_n) une suite numérique. Si (u_n) converge vers un réel strictement positif (resp. strictement négatif), alors

Démonstration. Traitons le cas d'une limite $\ell > 0$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}\ell$ dans la définition, on a donc

Donc, à partir d'un certain rang,

La suite suite est donc strictement positive à partir de ce rang. □

Définition 8.3.5
Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si

On dit que (u_n) diverge vers $-\infty$ si

On note alors

On a donc trois cas possibles pour une suite numérique :

- soit
- soit
- soit

8.3.1 Limites des suites usuelles

Proposition 8.3.6
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors

- *si $r > 0$, (u_n)*
- *si $r < 0$, (u_n)*
- *si $r = 0$, (u_n)*

Proposition 8.3.7
Soit (u_n) une suite géométrique de raison r. Alors

- *si $r \in]-1, 1[$, (u_n)*

- *si* $r > 1$, (u_n)
- *si* $r \leqslant -1$, (u_n)
- *si* $r = 1$, (u_n)

8.3.2 Opérations sur les limites

Les suites étant des fonctions numériques particulières, on peut utiliser les résultats connus sur les limites :

$\lim u_n + v_n$		$\lim u_n$		
		$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$			
	$+\infty$			
	$-\infty$			

$\lim u_n v_n$		$\lim u_n$		
		$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$			
	0			
	$\pm\infty$			

$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$		$\lim u_n$		
		$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$			
	0			
	$\pm\infty$			

De même, on peut rappeler les résultats de croissance comparées :

Proposition 8.3.8
Soient $a, b > 0$. *Alors*

- $\lim \dfrac{(\ln n)^a}{n^b} =$
- $\lim \dfrac{n^b}{(\ln n)^a} =$
- $\lim \dfrac{n^a}{e^{bn}} =$
- $\lim \dfrac{e^{bn}}{n^a} =$
- $\lim \dfrac{e^{an}}{n!} =$
- $\lim \dfrac{n!}{e^{an}} =$

- $\lim \dfrac{n!}{n^n} =$
- $\lim \dfrac{n^n}{n!} =$

On a aussi des propriétés de conservation de l'ordre :

Proposition 8.3.9
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors si (u_n) et (v_n) convergent, alors

8.3.3 Théorèmes de convergence

Voyons maintenant quelques théorèmes qui nous aideront à prouver l'existence de limites. On note que dans certains cas, le théorème prouve seulement l'existence de la limite, sans donner d'indication sur sa valeur.

Théorème 8.3.10 : de la limite monotone
Soit (u_n) une suite croissante. Alors

- *si (u_n) est majorée, alors*
- *si (u_n) n'est pas majorée, alors*

Soit (u_n) une suite décroissante. Alors

- *si (u_n) est minorée, alors*
- *si (u_n) n'est pas minorée, alors*

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Alors (u_n) est clairement croissante. Montrons qu'elle est majorée. Commençons par noter que . Par somme, on a donc pour tout n

u_n

La suite est donc majorée, et donc converge.

Théorème 8.3.11 : d'encadrement des limites
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

- *à partir d'un certain rang,*
-

Alors

Théorème 8.3.12 : d'encadrement des limites, cas infini
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang,

Si (u_n) diverge vers $+\infty$,

Si (v_n) diverge vers $-\infty$,

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

On note que

$$u_{n+1} - u_n =$$

Donc pour tout n, , puis par une récurrence immédiate,

La suite (u_n)

Définition 8.3.13
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si

Proposition 8.3.14
Deux suites adjacentes

Démonstration. Supposons par exemple que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. La suite $(v_n - u_n)$ est donc décroissante, et de limite 0. Donc pour tout n,

On a donc pour tout n

et donc (u_n)

De même,

donc (v_n)

Mais alors

□

On note que dans ce cas, la limite ℓ vérifie

EXEMPLE

Soient (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Alors $v_n - u_n =$. De plus, (u_n) est

Montrons que (v_n) est décroissante :

$v_{n+1} - v_n =$

$=$

$=$

$=$

Donc (v_n) est décroissante, et donc (u_n) et (v_n)

Les théorèmes généraux sur les suites extraites ne sont pas au programme, mais on pourra utiliser le résultat suivant :

Théorème 8.3.15
Soit (u_n) une suite numérique.

- *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si*

- *La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si*

On utilisera souvent la réciproque de ce théorème : si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) n'ont pas la même limite, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $u_{2n} =$ et $u_{2n+1} =$. Donc

Concluons cette partie avec le théorème suivant :

Théorème 8.3.16 : Caractérisation séquentielle de la continuité
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction. Soit $x \in I$. Alors sont équivalentes

(i)

(ii)

EXEMPLE

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors

et

On a donc

8.4 Étude des suites définies par récurrence

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. S'il n'y a pas de méthode générale pour étudier ce genre de suite, on pourra essayer de suivre les étapes suivantes :

-
-
-
-
-

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

f étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
Étudions la fonction $g = f - \mathrm{id}$. Alors $g(x) =$, et donc g

Regardons maintenant les limites éventuelles : si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors

On regarde maintenant tous les cas possibles :

- si $u_0 \in]0, 1[$:
- si $u_0 < 0$:
- si $u_0 > 1$:

8.5 Suites équivalentes

Définition 8.5.1
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes *si*

On note alors

NOTA

Dire qu'une suite est équivalente à une constante non nulle signifie simplement qu'elle converge vers cette constante.
On ne peut jamais écrire $u_n \sim 0$, puisque cette notation n'a pas de sens.

EXEMPLE

On a par exemple $\sqrt{n^2+1} \sim$.

Proposition 8.5.2 : Équivalents usuels
Soit (u_n) une suite qui converge vers 0. Alors

- $\sin(u_n) \sim$
- $\tan(u_n) \sim$
- $\cos(u_n) - 1 \sim$
- $\exp(u_n) - 1 \sim$
- $\ln(1+u_n) \sim$
- *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim$

Proposition 8.5.3
Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors

- *si (u_n) converge vers ℓ,*
- *si (u_n) diverge vers $\pm\infty$,*
- *si (u_n) n'a pas de limite,*

Démonstration. Par définition de la limite, on a à partir d'un certain rang pour tout $\varepsilon \in]0,1[$:
, c'est-à-dire

Il suffit de conclure par théorème d'encadrement des limites pour prouver les deux premiers points.

Le troisième point n'est que la contraposée des deux premiers. □

Cette proposition justifie des "principes" du type "la limite d'un polynôme est celle du terme de plus haut degré" ou toute autre méthode consistant à factoriser le terme le plus fort.

Proposition 8.5.4
Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Alors

- *si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$, *alors*
- *si* $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim z_n$, *alors*
- *si* $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim z_n$, *alors*

On peut donc multiplier ou diviser des équivalents.

NOTA

Attention, on ne peut pas additionner d'équivalents : si $u_n =$ et $v_n =$, alors $u_n \sim$ et $v_n \sim$, mais $u_n + v_n =$.
On ne peut pas non plus composer les équivalents : $n \sim n+1$, mais

8.6 Exercices

Exercice 1. Montrer qu'une suite (a_n) est arithmétique si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_n) = a_{n+1}.$$

Exercice 2. En 1798, Thomas Maltus dans *An Essay on the Principle of Population* affirme que la population d'un pays augmente de 2% par ans, alors que le nombre d'habitants pouvant être nourris augmente de 500000 par an.

En 1800, l'Angleterre compte huit millions d'habitants, et peut nourrir dix millions de personnes.

Quelle est la nature des suites donnant la population et le nombre d'habitants pouvant être nourris en 1800+n ?

Écrire un programme Python qui affiche l'année pour laquelle on ne pourra plus nourrir tout le monde.

Exercice 3. Calculer le terme général et la somme des termes des suites définies par $u_0 = 2$ et

- $u_{n+1} = u_n + 3$
- $u_{n+1} = u_n - 5$
- $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
- $u_{n+1} = 3u_n + 3$
- $u_{n+1} = -u_n - 4$
- $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$
- $u_{n+1} = 3u_n$
- $u_{n+1} = -5u_n$
- $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{3}$

Exercice 4. Calculer le terme général des suites définies par

- $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2_n + 3u_{n-1}$
- $u_0 = 2$, $u_1 = -3$ et $u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$
- $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = -4u_n$.
- $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
- $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Exercice 5. Donner une expression de u_n en fonction de n pour

- $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = 4(u_n - u_n^2)$ (on pourra poser $u_0 = \sin^2(\alpha)$)
- $u_0 \in [-2, 2]$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ (on pourra poser $u_0 = 2\cos(\theta)$)

Exercice 6. Étudier la limite éventuelle des suites suivantes :

- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- $\frac{\sin n}{n}$
- $n^{\frac{1}{n}}$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- $\frac{1+(-1)^n}{n}$

Exercice 7. Montrer qu'une suite à valeurs entières converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 8. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

b) Étudier la limite des suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite (qu'on appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b).

Exercice 10. Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. On pose pour tout n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Montrer que (S_n) converge (on pourra montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont même limite).

Exercice 11. Étudier la convergence de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 12. Montrer que la suite $(\cos n)$ n'admet pas de limite.

Exercice 13. Soit $a > 0$. On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

a) Calculer pour tout n $u_{n+1}^2 - a$.

b) Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ dès que $n \geqslant 1$, puis que (u_n) est décroissante.

c) Montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

On se propose maintenant de majorer l'erreur.

d) Montrer que pour tout n,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

puis que si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$,

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}.$$

e) Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de huit décimales (on pourra prendre $u_0 = 3$).

Exercice 14. a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$

admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée a_n.

b) Montrer que (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

c) Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.