Chapitre 9

Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on va voir une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires.

9.1 Vocabulaire

Définition 9.1.1
Soit n et p deux entiers non nuls.

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ *tout système de la forme*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kp}x_p & = & b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_p \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres (réels ou complexes).

Dans le cas d'un tel système, un p-uplet de valeurs $x_1, \dots, x_p$ est *solution du système* si les n équations sont vérifiées.

Résoudre le système, c'est trouver tous les p-uplets solution.

Un système *compatible* est un système qui admet au moins une solution.

Un système *homogène* est un système pour lequel tous les b_i valent 0.

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont exactement les mêmes solutions.

Si $n = p$ et que le système admet une unique solution, alors le système est dit *de Cramer* [*].

NOTA

Donc, un système de Cramer homogène n'admet que $(0, \dots, 0)$ comme solution.

Définition 9.1.2
On dit qu'un système est echelonné *s'il est de la forme*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & a_{rr}x_r + & \cdots & + & a_{kp}x_p & = & b_k \\ & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & = & b_n \end{cases}$$

où $a_{rr} \neq 0$.

Autrement dit, pour passer d'une ligne à l'autre, on doit "enlever" au moins une inconnue "à gauche".

Définition 9.1.3
Pour un système échelonné, les premiers coefficients non nuls de chaque ligne sont appelés pivots.

Le rang du système est alors le nombre de pivots.

Proposition – Définition 9.1.4
Deux systèmes équivalents ont même rang. On appelle alors rang *d'un système le rang de n'importe quel système échelonné qui lui est équivalent.*

NOTA

Le rang d'un système est donc toujours inférieur au nombre de lignes.

[*]. Gabriel Cramer. Mathématicien suisse, 1704 - 1752

Dans le cas d'un système échelonné, les dernières équations de la forme $0 = b_j$ sont appelées *équations de compatibilité.* Si elles sont vérifiées, alors on peut fixer les valeurs de $x_{r+1}, \ldots, x_p$ et en déduire les autres inconnues en "remontant" le système.

Dans le cas $n = p$, on parle de *système triangulaire*. Dans ce cas, si *tous* les a_{ii} sont non nuls, alors le système est de Cramer.

EXEMPLE

Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & - & z & = 1 \\ & & y & + & z & = 2 \\ & & & & 3z & = 6 \end{array}\right.$$

est triangulaire. On trouve comme solutions : $z = 2, y = 0, x = 3$.

EXEMPLE

Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & - & z & + & 2t & = 1 \\ & & y & + & z & - & t & = 2 \\ & & & & 3z & & & = 6 \end{array}\right.$$

est échelonné. On trouve comme solutions : $z = 2, y = t, x = 3 - 4t$ pour toutes les valeurs de t.

Théorème 9.1.5

Soit un système échelonné de n équations à p inconnues. Soit r sont rang.

- *Si une équation de compatibilité n'est pas vérifiée, alors le système n'admet pas de solutions.*
- *Sinon, le système est compatible.*

  Plus précisement,

  - *si $r = p$, alors le système admet une unique solution qui s'obtient en éliminant les équations de compatibilité et en remontant le système.*
  - *si $r < p$, alors le système a une infinité de solutions. Plus précisemment, on peut exprimer $x_1, \ldots, x_r$ en fonctions de $x_{r+1}, \ldots, x_p$.*

9.2 Le pivot de Gauss

Dans cette section, nous allons voir une méthode générale qui fonctionne pour résoudre n'importe quel système linéaire : le *pivot de Gauss* †.

On appellera *opérations licites* les opérations suivantes :

- échanger deux lignes
- multiplier une ligne par un nombre non nul
- ajouter à une ligne un multiple d'une autre

On a alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 9.2.1
En appliquant des opérations licites à un système linéaire, on obtient toujours un système linéaire, qui est équivalent à celui de départ.

Le but de la méthode est donc d'utiliser intelligemment ces trois règles pour transformer le système linéaire qu'on veut résoudre en un système linéaire équivalent, échelonné ou triangulaire.

Traitons cette méthode sur un exemple :

On veut résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 & (L_1) \\ x - 2y + z = 3 & (L_2) \\ 2x + 3y + 2z = -1 & (L_3) \end{cases}$$

Étape 1 : Utiliser la première ligne pour faire disparaître les x dans les suivantes.

On veut faire disparaître x dans la deuxième ligne. On a deux choix :

- ajouter $-\frac{1}{3}L_1$ à L_2
- multiplier L_2 par 3, puis ajouter $-L_1$ à L_2

†. Carl Friedrich Gauß. Scientifique allemand, 1777 - 1855

La deuxième méthode permet de retarder l'apparition des fractions.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 2 & (L_1) \\ 3x & - & 6y & + & 3z & = & 9 & (L_2 \leftarrow 3L_2) \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & -1 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 2 & (L_1) \\ & & -7y & + & 4z & = & 7 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & -1 & (L_3) \end{array}\right.$$

On veut maintenant faire disparaître x dans la troisième ligne.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 2 & (L_1) \\ & & -7y & + & 4z & = & 7 & (L_2) \\ & & 7y & + & 8z & = & -8 & (L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

Étape 2 : Utiliser la deuxième ligne pour faire disparaître les y dans les suivantes.

On remarque qu'il suffit d'ajouter L_2 à L_3 pour faire disparaître les y dans L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 2 & (L_1) \\ & & -7y & + & 4z & = & 7 & (L_2) \\ & & & & 12z & = & -1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

Étape 3 : Conclure.

En remontant le système, on trouve (dans l'ordre) :

- $z = \frac{-1}{1}2$
- $y = \frac{22}{21}$
- $x = \frac{73}{252}$

9.3 Exercices

Exercice 1. On considère les deux systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 40 \\ x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 41 \\ x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \end{array}\right.$$

Résoudre (S_1) et (S_2) et commenter le résultat.

Exercice 2. Résoudre les systèmes en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & a \\ -x & + & 4y & = & b \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & a \\ -x & - & \frac{1}{2}y & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. À quelle condition sur les a_i le système admet-il une solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2a_1 \\ x_2 & + & x_3 & = & 2a_2 \\ & \ldots & & & \\ x_n & + & x_1 & = & 2a_n \end{array}\right.$$

Exercice 4. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant selon les valeurs de m :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} mx & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & my & + & z & + & t & = & m \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & m+1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 1 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1
\end{array}\right.$$