- On considère la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
  1. Calculer N^2, puis donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
  2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I_3.$$
  3. Donner une expression explicite de (u_n) et (v_n), puis de N^n.

- 1. Montrer que toute matrice s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
  2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
$$X + {}^{\mathbf{t}}X = \mathrm{Tr}(X)A.$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I + A$ inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.
  1. Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.
  2. Montrer que $I + B$ est inversible, et exprimer A en fonction de B.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On définit la fonction $M : x \in \mathbb{R} \mapsto I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$.
  1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^n pour tout n.
  2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$M(x + y) = M(x)M(y).$$
  3. En déduire que pour tout n, $M(nx) = M(x)^n$.
  4. Montrer que $M(x)$ est toujours inversible, et donner son inverse.

- Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que
$$\overline{z}(z - 1) = z^2(\overline{z - 1}).$$

- On considère l'équation $(z - 1)^n = (z + 1)^n$.
  1. Montrer que les solutions sont imaginaires pures.
  2. Motnrer que si z est solution, $-z$ aussi.
  3. Résoudre l'équation.

- Étudier la suite définie par
$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} \quad (n + 1 \text{ racines imbriquées}).$$

- Pour tout $n \geqslant 2$, on pose
$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$
et
$$b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$
Montrer que les suites sont adjacentes, et déterminer leur limite commune.

- Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note (E_n) l'équation $x^n - x = n$.
  1. Montrer que pour tout n, (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n. Montrer que $u_n > 1$.
  2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 2,\ n^{\frac{2}{n}} \leqslant n.$$
  En déduire la limite de (u_n).
  3. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = u_n - 1$. Montrer que
$$n \ln(v_n + 1) = \ln(v_n + 1 + n).$$
  En déduire que $v_n \sim \frac{\ln n}{n}$.

- Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si
$$\forall A \subseteq E,\ f(E \backslash A) = F \backslash f(A).$$

- 1. Montrer que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme sommue d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
  2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation matricielle
$$X + {}^{\mathbf{t}}X = \mathrm{Tr}(X)A.$$