- Énoncer et montrer la formule des probabilités totales.

- Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.

- Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$, et f définie au voisinage de a. Montrer que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors cette limite est unique.

- Alice et Bob tirent au pistolet sur une cible suivant les règles suivantes :
  — Ils tirent chacun leur tour. Le premier qui atteint la cible a gagné.
  — Lorsqu'il tire, Alice atteint la cible avec la probabilité $a \in]0,1[$.
  — Lorsqu'il tire, Bob atteint la cible avec probabilité $b \in]0,1[$.
  — Alice tire le premier.

  On note A_{2n-1} l'événement "Alice gagne à l'issue du tir numéro $2n-1$", et B_{2n} l'événement "Bob gagne à l'issue du tir numéro $2n$".
  1. Calculer les probabilités de A_1, B_2 et A_3.
  2. Calculer les probabilités de A_{2n-1} et B_{2n}.
  3. Pour $n \geqslant 1$, on note C_n et D_n les événements "Alice gagne à un tir de numéro inférieur à $2n-1$" et "Bob gagne à un tir de numéro inférieur à $2n$".
     Calculer les probabilités de C_n et D_n.
  4. Calculer les limites de $P(C_n)$ et $P(D_n)$ quand $n \to \infty$.

- On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre face noires et deux blanches, et le dé B a deux faces noires et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie qui donne "pile" avec probabilité $p \in]0,1[$.
  Si on obtient "pile", on joue avec le dé A, et si on obtient "face", on joue avec le dé B.
  1. Calculer la probabilité d'obtenir "noir" au premier lancer de dé.
  2. Calculer la probabilité d'obtenir "noir" au deux premiers lancers.
  3. Les événements "On obtient "noir" au premier lancer" et "On obtient "noir" au second lancer" sont-ils indépendants ?
  4. On a obtenu "noir" aux n premiers lancers. Déterminer la probabilité a_n d'avoir utilisé le dé A.
  5. Quelle est la limite de (a_n). Comment peut- on l'interpréter ?

- On considère une marche aléatoire sur les sommets d'un carré $ABCD$. Lorsqu'on est sur un sommet, on se déplace sur un des deux sommets placés sur la même arête avec probbilités $\frac{1}{3}$ ou on reste sur place avec probabilité $\frac{1}{3}$. On effectue ainsi n déplacements indépendants. On suppose qu'on se trouve initialement en A.
  On pose $A_n =$ "après n déplacements on se trouve sur le sommet A", et $a_n = P(A_n)$. On définit de même $B_n,\ C_n,\ D_n,\ b_n,\ c_n$ et d_n.
  1. Donner un système de relations de récurrence vérifiées par $a_n,\ b_n,\ c_n$ et d_n.
  2. Écrire ce système de relations à l'aide d'une relation matricielle. On pourra poser $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$, et trouver M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
  3. On pose $B = 3M - I_4$, J la matrice ne contenant que des 1, et K la matrice de coefficient (i,j) $(-1)^{i+j}$.
     Montrer que
     $$B^n = 2^{n-2}J + (-1)^n 2^{n-2} K.$$
  4. En déduire que
     $$\begin{aligned} M^n =& \frac{1}{3^n} I_4 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) J \\ &+ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) K. \end{aligned}$$
  5. En déduire l'expression de $a_n,\ b_n,\ c_n$ et d_n en fonction de n.
  6. Déterminer les limites des quatres suites. Comment peut-on l'interpréter ?

- 1. Déterminer $\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
  2. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de u_n.
  3. Soit $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
     $$\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1.$$
     Déterminer a.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
  $$\frac{\ln^2(2-x)}{x^2 + ax + b} \xrightarrow[x\to 1]{} 1.$$
  Déterminer a et b.

- Calculer la limite quand $x \to \alpha$ de
  $$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}.$$

- Calculer la limite quand $x \to \infty$ de
  $$\frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2(x)}$$
  en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.