- Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

- Calculer sans récurrence la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.

- Soient $f : E \to F$ et $B \subseteq F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, mais que l'inclusion inverse est fausse.

- Calculer la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$
On pourra utiliser la formule pour développer $\tan(a-b)$.

- Calculer la somme
$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|.$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
   1. Montrer que pour tout $x \neq 1$,
$$P_n'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$
   2. Calculer les sommes
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k}{2^k}.$$

- Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout ensemble G et toutes applications $g : F \to G$ et $h : F \to G$, on a
$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

- Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout ensemble G et toutes applications $g : G \to E$ et $h : G \to E$, on a
$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$
   1. f est-elle injective ? surjective ?
   2. Calculer $f(\mathbb{R})$.
   3. Montrer que f induit une bijection de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$.

- Soient E, F, G non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que
   — Si $g \circ f$ injective alors f injective
   — Si $g \circ f$ surjective alors g surjective

- Soient E et F deux ensembles finis, ayant respectivement n et p éléments. Soit $f : E \to F$.
   1. Montrer que si f est injective, alors $n \leqslant p$
   2. Montrer que si f est surjective, alors $n \geqslant p$.
   3. On suppose $n = p$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.