- Résoudre l'équation différentielle
$$(1+e^x)y' + e^x y = 0.$$

- Avec le changemet de variable $u = \sqrt{1+x}$, calculer
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$$

- Calculer le terme général de la suite définie par $u_0 = 3$ et
$$\forall n,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

- Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall s, t \in \mathbb{R},\ f(s+t) = f(s)f(t).$$

- Résoudre l'équation
$$y'' + y = \sin(\omega x)$$
pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

- On pose pour tout n
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$
Montrer que
$$\frac{u_n}{n^{p+2}} \to 0.$$

- On pose pour tout n
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$
Montrer que (u_n) converge.
En montrant l'inégalité
$$\forall x > 1,\ \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln\left(\frac{x}{x-1}\right),$$
calculer sa limite.

- Montrer que la suite $\left(\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right)$ converge.
Montrer que la suite (v_n) définie par
$$v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$
est géométrique, et en déduire la valeur de u_n

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à valeurs dans $[0,1]$ telles que
$$u_n v_n \to 1.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

- Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

- Soit $a > 0$. On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$
  1. Calculer pour tout n $u_{n+1}^2 - a$.
  2. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ dès que $n \geqslant 1$, puis que (u_n) est décroissante.
  3. Montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.