- Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 1 \\ 2x+y+2z & = & 0 \\ 3x+2y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

- Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x-y & = & 1 \end{array}\right.$$

- Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+3y+z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 0 \\ x+6y+z & = & 2 \end{array}\right.$$

- 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

  $$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$

  puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

  $$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

  2. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$. Montrer que

  $$H_n \sim \ln(n).$$

- Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \int_0^{u_n} (1-e^{-t})\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

  1. Montrer que la suite (u_n) converge.
  2. Montrer que la limite de (u_n) est nulle, puis montrer que la suite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend elle aussi vers 0.
  3. Montrer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} u_0$.
  4. En déduire que la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)$ converge.

- On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

  1. Montrer que

  $$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

  2. Déterminer la limite de (S_n).
  3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
  4. Donner un équivalent simple de (S_n).

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n k!.$$

  Montrer que $u_n \sim n!$.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n v_n \to 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

- Soi $f : [0,1] \to [0,1]$ une bijection telle que pour tout x, $f(2x - f(x)) = x$. Soit $u_0 \in [0,1]$. On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Montrer que (u_n) est arithmétique, et en déduire que $f = \mathrm{id}$.

- Établir la convergence des suites (u_n) et (v_n) où

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - ln(n) \text{ et } v_n = u_n + \frac{2}{n}.$$