- Soit E un ensemble à n éléments. Soit $A \subseteq E$ à pp éléments. Quel est le nombre de parties de E contenant exactement un élément de A ?

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *p-partition de n* toute suite finie d'entiers $(s_1, \ldots, s_p)$ telle que $s_1 + \cdots + s_p = n$.
  Montrer qu'il y a $\binom{p+n-1}{n}$ p-partition de n.

- On donne n droites du plan, telles que deux ne sont jamais parallèles et trois jamais concourantes. Combien de région sont délimitées par ces droites ?

- Soit E de cardinal n.
  1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties telles que $A \subseteq B$.
  2. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties distinctes telles que $A \cap B = \emptyset$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
  $$A_n = \{X \in \mathfrak{p}(\llbracket 1, n \rrbracket) \mid \\ \exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket,\ i \in X \text{ et } i+1 \in X\}.$$
  On pose $B_n = \mathfrak{p}(\llbracket 1, n \rrbracket) \backslash A_n$.
  1. Calculer les ensembles A_i et B_i pour $i = 0, 1, 2$.
  2. Donner une relation de récurrence entre $\mathrm{Card}(B_{n+2})$, $\mathrm{Card}(B_{n+1})$ et $\mathrm{Card}(B_n)$.
  3. En déduire le cardinal de B_n, puis celui de A_n.

- De combien de façons peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

- On considère $2n$ personnes, n filles et n garçons.
  1. De combien de façons peut-on les asseoir sur un banc en respectant une alternance fille-garçon ?
  2. De combien de façons peut-on les asseoir autour d'une table ronde en respectant une alternance fille-garçon ?

- Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. On pose
  $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_n\llbracket 1, p \rrbracket \\ f & \longmapsto & \{f(1), \ldots, f(n)\} \end{array}.$$
  Montrer que φ est bijective, et calculer le cardinal de $\mathscr{F}$.
  En déduire le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ (on pourra considérer la fonction qui a une fonction croissante f associe la fonction g définie par $g(k) = f(k) + k - 1$).

- Combien y a-t-il de mots de cinq lettres ? de cinq lettres distinctes ? de cinq lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de palindromes de cinq lettres ?

- Soit E de cardinal n. Calculer les sommes suivantes :
  1. $\displaystyle\sum_{A \in \mathfrak{p}(E)} \mathrm{Card}\, A$
  2. $\displaystyle\sum_{A, B \in \mathfrak{p}(E)} \mathrm{Card}(A \cap B)$
  3. $\displaystyle\sum_{A, B \in \mathfrak{p}(E)} \mathrm{Card}(A \cup B)$