Outils

Correction TD 1 : Vocabulaire de la logique et des ensembles

Raisonnements : implication, équivalence et récurrence

Correction exercice 1 : Étude de chaque propriété :

1. $x \in \mathbb{R},\ x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.
   L'autre sens est faux car $x^2 = 4$ admet deux solutions qui sont $x = -2$ et $x = 2$.
2. $z \in \mathbb{C},\ z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
3. $x \in \mathbb{R},\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow e^{4ix} = 1$.
   L'autre sens est faux, prendre par exemple $x = 0$.

Correction exercice 2 : On a $A \Rightarrow B$, mais l'autre sens est faux, B n'implique PAS A. En effet, $3+5=8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.

Correction exercice 3 : On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

- Etude du sens réciproque.
  On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. Il est clair qu'alors $x^2 + y^2 = 0$.
  Ainsi, on a montré que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \Rightarrow (x^2 + y^2 = 0)$.
- Etude du sens direct.
  On raisonne par contraposée.
  On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. En passant au carré, on obtient donc que $x^2 \neq 0$ ou $y^2 \neq 0$ et donc qu'en particulier $x^2 + y^2 \neq 0$, les deux termes étant positifs.
  Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : On a bien démontré l'équivalence.

Correction exercice 4 : On cherche à montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ (x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Par contraposée, on suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leq 2$. Donc non$(x + y > 2)$ est vérifiée.
Conclusion : Par contraposée, on a bien démontré que $(x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1)$.

Correction exercice 5 : Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Pour montrer que la propriété P est vraie, on raisonne par contraposée.
On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon$.
En faisant un dessin, on voit bien qu'il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$. En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x > 0$ et $x > \dfrac{x}{2}$ donc on a aussi $x > \varepsilon$.
Conclusion : Par contraposée, on a bien démontré la propriété P.

Correction exercice 6 : On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible.
On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible.
Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Logique et quantificateur

Correction exercice 7 : Étude de chaque assertion :

1. Faux Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$.
2. Vrai Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ y < 0$.
3. Vrai Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
4. Faux Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2$.
5. Faux Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
6. Faux Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
7. Vrai Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
8. Faux Négation : $\exists x \in \mathbb{R},_\exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.

Correction exercice 8 : Étude de chaque propriété :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_0$
4. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$ Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.
6. $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$ Négation : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.

Correction exercice 9 : Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \ (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
   Négation : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$.
6. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ f(x + kT) = f(x)$
   Négation : $\forall T \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z},\ f(x + kT) \neq f(x)$.

Correction exercice 10 :

1. L'inégalité $1 \leq x < y$ correspond à $1 \leq x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A ou non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x < 1 \text{ ou } x \geq y.}$
2. La négation de $P \Rightarrow Q$ est (P et non Q). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2 = 1 \text{ et } x \neq 1.}$
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in E,\ \exists x' \in E' : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\ .}$

Raisonnement par récurrence

Correction exercice 11 : Raisonnement par récurrence :

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

- Initialisation : pour $n = 0$:
  On a $\sum_{k=0}^{0} kk! = 0$ et $1! - 1 = 0$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} kk! = \sum_{k=0}^{n} kk! + (n+1)(n+1)!.$$

  Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} kk! &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1.\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.
- Il résulte du principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

Correction exercice 12 :

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

- Initialisation : pour $n = 0$:
  D'un côté, on a : $\sum_{k=0}^{0} (2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$. De l'autre côté, on a : $(0+1)^2 = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  On a d'après la relation de Chasles : $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) + 2(n+1) + 1$. Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient : $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Il résulte du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

Correction exercice 13 :

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1).$$

- Initialisation : pour $n = 2$:
  D'un côté, on a : $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \times 2 = 2$. De l'autre côté, on a : $\frac{1}{3} \times 2 \times 1 \times 3 = 2$. Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  On a d'après la relation de Chasles : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + n(n+1)$. Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1) = n(n+1)\left(\frac{n-1}{3}+1\right) = n(n+1)\frac{n+2}{3}$.
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Il résulte du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Correction exercice 14 : Raisonnement par récurrence. Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$: on montre ici cela par récurrence.

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

- Initialisation : pour $n = 0$:
  Par définition de la suite, on sait que $u_0 = 1$. Ainsi on a bien $u_0 > 0$. De plus, le calcul donne $u_1 = \ln(1+u_0) = \ln(2)$. Comme $2 < e$ et que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient : $u_1 < u_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ⋆ Comme, par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 0$, on a : $1 + u_n > 1$. Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient que : $\ln(1+u_n) > \ln 1$, à savoir : $u_{n+1} > 0$.
  - ⋆ On veut ensuite montrer que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, à savoir que $\ln(1+u_{n+1}) \leq \ln(1+u_n)$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_{n+1} \leq u_n$, ainsi on a : $1 + u_{n+1} \leq 1 + u_n$. Puis la fonction logarithme népérien étant strictement croissante, on obtient que $\ln(1+u_{n+1}) \leq \ln(1+u_n)$, à savoir : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Il résulte du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction exercice 15 : Raisonnement par récurrence :

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) :\ \forall \theta \in [0, \pi],\ |\sin(n\theta)| \leq n \sin\theta.$$

- Initialisation : pour $n = 0$:
  Soit $\theta \in [0, \pi]$. On a $\sin 0 = 0$ et $n \sin\theta = 0$. .
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Soit $\theta \in [0, \pi]$. En appliquant la formule sur l'addition des angles et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(n\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)\cos\theta| + |\sin\theta\cos(n\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)||\cos\theta| + |\sin\theta||\cos(n\theta)|. \end{aligned}$$

  Par hypothèse de récurrence et en se souvenant que $\theta \in [0, \pi]$, on obtient alors

$$\begin{aligned} |sin((n+1)\theta)| &\leq n\sin\theta|\cos\theta| + \sin\theta|\cos(n\theta)| \\ &\leq \sin\theta\left(n|\cos\theta| + |\cos(n\theta)|\right). \end{aligned}$$

  Il reste donc à vérifier que $n|\cos\theta| + |\cos(n\theta)| \leq n+1$. Or, on sait que $|\cos\theta| \leq 1$ donc $n|\cos\theta| \leq n$. De plus, $|\cos(n\theta)| \leq 1$, ainsi, on obtient bien $n|\cos\theta| + |\cos(n\theta)| \leq n+1$ puis

$$|sin((n+1)\theta)| \leq (n+1)\sin\theta.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.

- Il résulte du principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in [0, \pi],\ |\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta.$$

Correction exercice 16 : Raisonnement par récurrence double :

- Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) :\ u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$

- Initialisation : pour $n = 0$ et pour $n = 1$:
  - ⋆ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - ⋆ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n et $n + 1$, vérifions que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.
  Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi on obtient que :
  $u_{n+2} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n) = 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} + 2(-1)^n =$
  $2^{n+2}(1 + 1) + (-1)^n(-1 + 2) = 2^{n+3} + (-1)^n$. Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi on a :
  $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$. Ainsi $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Ensembles

Correction exercice 17 : Montrons par double inclusion que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

- Soit $x \in A\Delta B$.
  Alors $x \in A \cup B$, et $x \notin A \cap B$.
  Donc on a soit ($x \in A$ et $x \notin B$), soit ($x \in B$ et $x \notin A$), c'est-à-dire $x \in A\backslash B$ ou $x \in B\backslash A$.
  Donc $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
- $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
  Alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc $x \in A \cup B$.
  De plus, si $x \in A$, alors $x \notin B$, et si $x \in B$, alors $x \notin A$.
  Donc $x \notin A \cap B$. Donc $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B) = A\Delta B$.

Pour montrer la deuxième égalité, on utilise le fait que $A\backslash B = A \cap \bar{B}$, et $B\backslash A = B \cap \bar{A}$.

Correction exercice 18 : On montre l'équivalence par double implication.

1. On commence par montrer que $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$.
   On suppose donc que $A = B$.
   Comme $A = B$, on a en particulier, $A \cup B = A = B$ et $A \cap B = A = B$.
   Donc $A \cup B = A \cap B$.
   Ainsi, on a bien vérifié que $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$.
2. On montre ensuite le sens réciproque : $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.
   On suppose donc que $A \cup B = A \cap B$ et on montre l'égalité entre les deux ensembles par double inclusion.
   - Soit $x \in A$.
     Comme $x \in A$, $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$.
     Donc $x \in B$.
     Ainsi, $A \subset B$.
   - Soit $x \in B$.
     Comme $x \in B$, $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$.
     Donc $x \in A$.
     Ainsi, $B \subset A$.

3. Conclusion : On a bien démontré que $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$.

Correction exercice 19 : Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.
On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit $B \not\subseteq C$, soit $C \not\subseteq B$. Par symétrie du problème, on peut supposer par exemple que $B \not\subseteq C$.
Il existe donc $x \in B$ tel que $x \notin C$.
On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$.
On doit étudier deux cas.

- Soit $x \in A$.
  On obtient alors que $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Ainsi, dans ce cas $A \cap B \neq A \cap C$.
- Soit $x \notin A$.
  On obtient alors que $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$.

Conclusion : Par contraposée, on a donc vérifié que : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

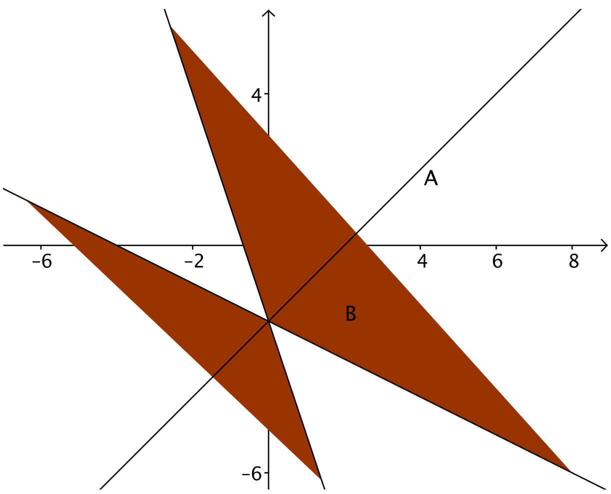
Correction exercice 20 : On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.

- On commence par exemple par supposer que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$.
  Comme $B \subset A$, on a : $A \cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$.
  Ainsi, on a : $A \cup B = A = A \cap C$. Ainsi on a montré une implication.
- On suppose alors que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$:
  - ⋆ On montre d'abord que $B \subset A$:
    Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in A$.
    On a bien montré que $B \subset A$.
  - ⋆ On montre d'abord que $A \subset C$:
    Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in C$.
    On a bien montré que $A \subset C$.

  Ainsi on a montré que $B \subset A \subset C$ et on a démontré la deuxième implication.

Par double implication, on a bien montré l'équivalence voulue.

Correction exercice 21 :



- On suppose que $(x, y) \in A$. Ainsi, par définition de l'ensemble A, on sait que $y = x - 2$. Montrons que $(x, y) \in B$, à savoir vérifions que : $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0$. On a :
  $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = (3x + x - 2 + 2)(x + 2x - 4 + 4) = 4x \times 3x = 12x^2$. Comme un carré est toujours positif, on a bien $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0$. Ainsi on a bien que $(x, y) \in B$ et on vient de montrer que $A \subset B$

- On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Par exemple $(1,0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A.

Correction exercice 22 :

1. Soit $E = \{1\}$. On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Puis, on obtient : $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{1, \emptyset\}\}$.
2. $\mathcal{P}(E) =$
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$.
3. Soit $E = \{a,b\}$. On a : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Puis

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}\}, \{\{\emptyset\}, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\},$$
$$\{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \}$$