Devoir libre 2

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le vendredi 05 octobre

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Une équation trigonométrique

Le but de cet exercice est de résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \cos x - \cos y & = \frac{1}{2} \\ \sin x \sin y & = \frac{3}{8} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$
2. On pose $a = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et $b = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
Montrer que le système $\mathcal{S}$ est équivalent à
$$(\mathcal{S}') \begin{cases} ab & = -\frac{1}{4} \\ a^2 - b^2 & = \frac{3}{8} \end{cases}$$
3. Montrer que les solutions de (S') sont exactement $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.
4. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.
On pourra utiliser le nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $\sin(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 2. Une équation complexe

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à montrer que les solutions de l'équation

$$pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$$

sont de modules strictement inférieurs à 1.

1. Montrer que pour tout $x \in [1, \infty[$,
$$px^{p+1} - (p+1)x^p + 1 \geqslant 0.$$
2. En déduire que les solutions de l'équation sont de modules inférieurs à 1.
3. Soit z une solution de l'équation de module 1. Soit θ un argument de z.
Montrer que $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$ est un nombre réel, qu'on calculera.
4. En déduire une contradiction, puis conclure.