Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le vendredi 09 novembre

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Une somme

Pour tout réel strictement positif x, on considère la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

Le but de l'exercice est de calculer cette somme.

(i) Montrer que quelque soit $x > 0$, la somme est en fait finie, *i.e.* a un nombre fini de termes non nuls.

(ii) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = 0$.

(iii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(2x) = f(x) + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

(iv) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor .$$

(v) En déduire que pour tout $x \in]0,2[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(vi) Par récurrence, montrer que pour tout n et pour tout $x \in]0, 2^n[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(vii) Conclure.

Exercice 2. Une autre expression de la partie entière

On considère la suite $(C_n)_n$ définie par récurrence (forte) par $C_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$C_{n+1} = n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (C_k + C_{n-k}) .$$

1. Calculer les valeurs C_1, C_2, C_3 et C_4.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$C_{n+1} = n + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k .$$

3. On définit une nouvelle suite $(D_n)_n$ par $D_n = nC_n$.
   (a) Pour $n \geqslant 2$, calculer $D_n - D_{n-1}$. En déduire que $nC_n = 2(n-1) + (n+1)C_{n-1}$.
   (b) Est-ce vrai pour $n = 0$? pour $n = 1$?

4. On définit une nouvelle suite $(E_n)_n$ par $E_n = \frac{C_n}{n+1}$.

   (a) Calculer E_0 et E_1.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + E_{n-1}.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)}.$$

   (d) Est-ce vrai pour $n = 0$?

   (e) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, qu'on explicitera, tels que pour tout $k \geqslant 1$,
   $$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

   (f) On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = 2H_n - \frac{4n}{n+1}.$$

   (g) En déduire une expression de C_n en fonction de n et H_n.

5. On admet que la suite $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $\frac{C_n}{n \ln n}$?

NOTA

On dit que la suite (C_n) est *équivalente* à $n \ln n$.

NOTA

La suite (C_n) est en fait la complexité (qui est un moyen de calculer le temps d'exécution) d'un algorithme de tri de liste qu'on découvrira plus tard en Python.