

Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le vendredi 09 novembre

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, etc.

Les exercices sont indépendants, et pourront être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Une somme

Pour tout réel strictement positif x , on considère la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Le but de l'exercice est de calculer cette somme.

- (i) Montrer que quelque soit $x > 0$, la somme est en fait finie, *i.e.* a un nombre fini de termes non nuls.
- (ii) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = 0$.
- (iii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(2x) = f(x) + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

- (iv) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

- (v) En déduire que pour tout $x \in]0, 2[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
- (vi) Par récurrence, montrer que pour tout n et pour tout $x \in]0, 2^n[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
- (vii) Conclure.

Exercice 2. Une autre expression de la partie entière

On considère la suite $(C_n)_n$ définie par récurrence (forte) par $C_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$C_{n+1} = n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (C_k + C_{n-k}).$$

1. Calculer les valeurs C_1, C_2, C_3 et C_4 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$C_{n+1} = n + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n C_k.$$

3. On définit une nouvelle suite $(D_n)_n$ par $D_n = nC_n$.
 - (a) Pour $n \geq 2$, calculer $D_n - D_{n-1}$. En déduire que $nC_n = 2(n-1) + (n+1)C_{n-1}$.
 - (b) Est-ce vrai pour $n = 0$? pour $n = 1$?

4. On définit une nouvelle suite $(E_n)_n$ par $E_n = \frac{C_n}{n+1}$.

(a) Calculer E_0 et E_1 .

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$E_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + E_{n-1}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$E_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)}.$$

(d) Est-ce vrai pour $n = 0$?

(e) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, qu'on explicitera, tels que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

(f) On pose, pour tout $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = 2H_n - \frac{4n}{n+1}.$$

(g) En déduire une expression de C_n en fonction de n et H_n .

5. On admet que la suite $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $\frac{C_n}{n \ln n}$?

NOTA

On dit que la suite (C_n) est *équivalente* à $n \ln n$.

NOTA

La suite (C_n) est en fait la complexité (qui est un moyen de calculer le temps d'exécution) d'un algorithme de tri de liste qu'on découvrira plus tard en Python.