Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le vendredi 09 novembre

Exercice 1. Une autre expression de la partie entière

1. Quelque soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n > \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, on a
$$0 < \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} < 1,$$
et donc sa partie entière est nulle. On a donc en fait
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \log_2(x) \rfloor + 1} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

2. Soit $x \in]0,1[$. On a alors pour tout $n \geqslant 0$ $\frac{x}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}$, et donc
$$0 < \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}.$$
La partie entière est donc nulle, et donc tous les termes de la sommes sont nuls.

3. Soit $x > 0$. On a
$$\begin{aligned} f(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{2x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

4. Posons $n = \lfloor x \rfloor$, et considérons deux cas.
   - Si $x \in [n, n+\frac{1}{2}[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n+\frac{1}{2}, n+1[$, et donc sa partie entière vaut n. De plus, $2x \in [2n, 2n+1[$, et donc $\lfloor 2x \rfloor = 2n$, et on a bien le résultat.
   - Si $x \in [n+\frac{1}{2}, n+1[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n+1, n+\frac{3}{2}[$, et donc $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n+1$. De plus, $2x \in [2n+1, 2n+2[$, et donc sa partie entière vaut $2n+1$.

   Dans les deux cas, on a bien le résultat.

5. Soit $x \in]0,2[$. On a alors $\frac{x}{2} \in]0,1[$, et donc
$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(2\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2}\right) + \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor & \text{question 3} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor & \text{question 2} \\ &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor & \text{question 4} \\ &= \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

6. La propriété est déjà montrée pour $n = 0, 1$. Supposons maintenant qu'elle est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]0, 2^{n+1}[$. Alors avec la même méthode, on a $\frac{x}{2} \in]0, 2^n[$, et donc pas hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(2\frac{x}{2}\right) \\
&= f\left(\frac{x}{2}\right) + \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{question 3} \\
&= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \lfloor x \rfloor \quad \text{question 4}
\end{aligned}$$

7. Il suffit donc, pour tout $x > 0$, de choisir n assez grand dans la question précédente pour avoir $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2. Complexité du quicksort

1. On a donc

$$C_1 = 0 + \frac{1}{1}(C_0 + C_0) = 0,$$
$$C_2 = 1 + \frac{1}{2}(C_0 + C_1 + C_1 + C_0) = 1,$$
$$C_3 = 2 + \frac{1}{3}(C_0 + C_2 + C_1 + C_1 + C_2 + C_0) = \frac{8}{3},$$
$$C_4 = 3 + \frac{1}{4}(C_0 + C_3 + C_1 + C_2 + C_2 + C_1 + C_3 + C_0) = \frac{29}{6}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (C_k + C_{n-k}) \\
&= n + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k + \sum_{k=0}^{n} C_{n-k} \right) \\
&= n + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k
\end{aligned}$$

par inversion d'indice.

3. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
D_n - D_{n-1} &= nC_n - (n-1)C_{n-1} \\
&= n\left(n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right) - (n-1)\left(n - 2 + \frac{2}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} C_k\right) \\
&= n(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k - (n-1)(n-2) - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \\
&= 2(n-1) + 2C_{n-1}
\end{aligned}$$

   On a donc
$$nC_n = D_n = 2(n-1) + 2C_{n-1} + D_{n-1} = 2(n-1) + (n+1)C_{n-1}.$$

   (b) Pour $n = 0$, la formule n'a pas de sens. Pour $n = 1$, la formule reste vraie.

4. (a) On a clairement $E_0 = E_1 = 0$.

   (b) Divisons la formule de récurrence obtenue en 3a par $n(n+1)$:

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{C_{n-1}}{n}.$$

   On retrouve directement le résultat voulu.

(c) Montrons-le par récurrence.
Pour $n = 1$, la formule est vraie.
Supposons qu'elle le soit pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + E_n \\ &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Par théorème de récurrence, la formule est donc vraie.

(d) Pour $n = 0$, la somme est vide, et donc nulle, et donc la formule reste vraie.

(e) En multipliant par k, on obtient

$$\frac{k-1}{k+1} = a + \frac{kb}{k+1},$$

puis en prenant $k = 0$, on a $a = -1$.
De même, en multipliant par $k+1$ et en prenant $k = -1$, on obtient $b = 2$.

(f) On a donc pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} E_n &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 2H_n \\ &= 4\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 2H_n \\ &= 4(H_n + \frac{1}{n+1} - 1) - 2H_n \\ &= 2H_n + \frac{4}{n+1} - 4 \\ &= 2H_n + \frac{4n}{n+1} \end{aligned}$$

(g) On a donc pour tout n

$$C_n = 2(n+1)H_n - 4n.$$

5. On a

$$\frac{C_n}{n\ln n} = \frac{2(n+1)H_n}{n\ln n} - \frac{4n}{n\ln n},$$

et donc

$$\frac{C_n}{n\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$