Devoir libre 4

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le mardi 22 janvier

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Géométrie (Oral 2017 Agro-Véto)

1. On peut écrire le programme suivant :

```
def f(a):
  s=0
  n=len(a)
  for i in range(n):
    s = s + a[i]
  b=True
  for i in range(n):
    b = b and (a[i]*a[i]*s >= 2)
  return b
```

2. Notons u', v' et w' les projetés orthogonaux de u, v, w sur P.
   - On a $u \in P$, et donc $u' = u$.
   - Posons $v' = (x, y, z)$. Comme $v' \in P$, on a $y = z$. De plus, $v' - v = (x, y - \sqrt{2}, y)$ et $(0, 1, -1)$ sont colinéaires : on a donc $x = 0$, et $y - \sqrt{2} = -y$, d'où $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
     Finalement, $v' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   - Posons $w' = (x, y, z)$. Comme $w' \in P$, on a $y = z$. De plus, $w' - w = (x, y, y - \sqrt{2})$ et $(0, 1, -1)$ sont colinéaires : on a donc $x = 0$, et $y = -y + \sqrt{2}$, d'où $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
     Finalement, $w' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Ces trois vecteurs sont bien de norme 1.

3. (a) Vérifions les deux conditions.
   - $p(u)$ est bien dans P comme vecteur de la forme $\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$.
   - On a

   $$\begin{aligned}(p(u) - u) \cdot \varepsilon_1 &= u \cdot \varepsilon_1 - u \cdot \varepsilon_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

   Le produit scalaire avec ε_2 est nul pour la même raison.

   Finalement, $p(u)$ est bien le projeté orthogonal de u sur P.

   (b) Il suffit de le vérifier :

   $$\begin{aligned}p(\lambda u) &= (\lambda u \cdot \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (\lambda u \cdot \varepsilon_2)\varepsilon_2 \\ &= \lambda(u \cdot \varepsilon_1)\varepsilon_1 + \lambda(u \cdot \varepsilon_2)\varepsilon_2 \\ &= \lambda p(u)\end{aligned}$$

(c) On a d'une part

$$\begin{aligned}\|p(a_ie_i)\|^2 &= a_i^2\|p(e_i)\|^2\\ &= a_i^2((e_i\cdot\varepsilon_1)^2+(e_i\cdot\varepsilon_2)^2)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\|p(a_ie_i)\|^2 = d^2.$$

(d) Notons donc $\varepsilon_i = (x_i, y_i, z_i)$. La somme des trois égalités précédentes donne

$$(e_1\cdot\varepsilon_1)^2+(e_1\cdot\varepsilon_2)^2+(e_2\cdot\varepsilon_1)^2+(e_2\cdot\varepsilon_2)^2+(e_3\cdot\varepsilon_1)^2+(e_3\cdot\varepsilon_2)^2 = d^2\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_i^2}.$$

Mais

$$(e_1\cdot\varepsilon_1)^2+(e_1\cdot\varepsilon_2)^2+(e_2\cdot\varepsilon_1)^2+(e_2\cdot\varepsilon_2)^2+(e_3\cdot\varepsilon_1)^2+(e_3\cdot\varepsilon_2)^2 = x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+z_1^2+z_2^2 = 2$$

car les vecteurs ε_i sont unitaires.

(e) On note que par définition $p(a_ie_i)-a_ie_i$ et ε_3 sont colinéaires, et donc il existe un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$p(a_ie_i)-a_ie_i = \lambda\varepsilon_3.$$

On a donc

$$p(a_ie_i)+\lambda\varepsilon_3 = a_ie_i,$$

et par orthogonalité de $p(a_ie_i)$ et ε_3,

$$d^2+\lambda^2 = a_1^2.$$

On a donc bien $a_i^2 \geqslant d^2$, puis $|a_i|\geqslant d$.

(f) On a donc pour tout i

$$\begin{aligned}a_i^2\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k^2} &= \frac{2a_i^2}{d^2}\\ &\geqslant 2.\end{aligned}$$

Exercice 2. Des oiselles (G2E 2018)

1. (a) Le déterminant de P est

$$\det(P) = -2\times\frac{3}{5}-2\times\frac{1}{5} = -\frac{8}{5}.$$

$\det(P)$ est donc non nul, et P est inversible :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -2\\ -\frac{1}{5} & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 10\\ 1 & -10\end{pmatrix}.$$

(b) Calculons $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 10\\ 1 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ \frac{3}{20} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & 15\\ -\frac{1}{2} & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice $D = P^{-1}AP$ est donc diagonale, et donc $A = PDP^{-1}$.

2. (a) Au bout d'un an, toutes les oiselels jeunes disparaissent (soit elles meurent, soit elles deviennent adultes). Toutes les nouvelles oiselles jeunes sont donc de nouvelles naissances : il y en a une par jeune, et 5 par adulte, d'où $j_n + 5a_n$ oiselles jeunes.

Toutes les adultes meurent, et 15% des jeunes deviennent adultes, d'où $\frac{15}{100} j_n$ adultes à l'année suivante.

Finalement,

$$j_{n+1} = j_n + 5a_n \text{ et } a_{n+1} = \frac{15}{100} j_n = \frac{3}{20} j_n.$$

On a donc

$$AX_n = \begin{pmatrix} j_n + 5a_n \\ \frac{3}{20} j_n \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\varphi_n \ : \ X'_n = D^n X'_0$.

- φ_0 est clair, D^0 étant la matrice identité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons φ_n. Alors

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= P^{-1} X_{n+1} \\ &= P^{-1} A X_n \text{ question 2a} \\ &= D P^{-1} X_n \text{ question 1b} \\ &= D X'_n \\ &= D D^n X'_0 \text{ par } \varphi_n \\ &= D^{n+1} X'_0 \end{aligned}$$

D'où φ_{n+1}.

Par théorème de récurrence, on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ X'_n = D^n X'_0.$$

(c) Supposons que $j_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} X_n &= P X'_n \\ &= P D^n X'_0 \text{ question 2b} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{3}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n & -\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 20\left(\frac{3}{2}\right)^n - 20\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{3}{2}\right)^n + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\ \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 - \frac{3}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc

$$j_n = \left(\frac{3}{4} j_0 + \frac{5}{2} a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4} j_0 - \frac{5}{2} a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le premier terme tendant vers $+\infty$ et le second vers 0, on a donc

$$\frac{j_n}{\left(\frac{3}{4} j_0 + \frac{5}{2} a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{4} j_0 - \frac{5}{2} a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4} j_0 + \frac{5}{2} a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to 1,$$

et donc

$$j_n \sim \left(\frac{3}{4} j_0 + \frac{5}{2} a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

De la même façon,

$$a_n \sim \left(\frac{3}{40} j_0 + \frac{1}{4} a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$