Devoir libre 1 : Trigonométrie hyperbolique

Pour le

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Question préliminaire

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, *i.e.*

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ paire},\ \exists v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ impaire},\ f = u + v.$$

Trigonométrie hyperbolique

Dans la décomposition précédente appliquée à l'exponentielle, on appelle *cosinus hyperbolique* la partie paire et *sinus hyperbolique* la partie impaire.

Partie A : Étude du cosinus hyperbolique

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. Calculer les limites de ch en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation complet de ch.
4. Tracer la courbe de la fonction ch.
5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Partie B : Étude du sinus hyperbolique

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

2. Calculer les limites de sh en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation complet de sh.
4. Tracer la courbe de la fonction sh.
5. En étudiant les fonctions $x \mapsto \mathrm{sh}(x) - mx$, montrer que sh n'admet aucune asymptote.
6. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue x
$$\mathrm{sh}(x) = y.$$
En déduire la fonction réciproque de sh ; on l'appelle Argsh.
7. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x)) = x$ et $\mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.

Partie C : Relations algébriques

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b).$$
2. Trouver une formule analogue pour $\mathrm{sh}(a+b)$.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$$

Partie D : Étude de la tangente hyperbolique

Comme en trigonométrie classique, on appelle *tangente hyperbolique* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

1. Calculer la dérivée de th.
2. Montrer qu'on peut exprimer $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ en fonction de l'angle moitié, *i.e.* en fonction de $\mathrm{th}(\frac{x}{2})$.