Devoir surveillé 1

Angers Le Fresne : BCPST 1

22 Septembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Parties convexes de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *convexe* si

$$\forall a, b \in A,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \in [a, b] \Rightarrow x \in A.$$

1. Montrer que tout intervalle est convexe.

On veut maintenant montrer la réciproque : tout ensemble convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Soit donc A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et convexe.

2. On suppose que A est majoré. Montrer le lemme suivant :

   $$\text{Si } x < \sup A, \text{ alors il existe } y \in A \text{ tel que } x < y < \sup A.$$

   On admet le lemme dual suivant :

   $$\text{Si } A \text{ est minoré, alors pour tout } x > \inf A, \text{ il existe } y \in A \text{ tel que } \inf A < y < x.$$

3. On suppose que A est borné, et que $\inf A$ et $\sup A$ sont dans A. Montrer que $A = [\inf A, \sup A]$.
4. On suppose que A est borné, et que $\inf A$ et $\sup A$ ne sont pas dans A. Montrer que $A =]\inf A, \sup A[$.
5. On suppose que A n'est ni minoré, ni majoré. Montrer que $A = \mathbb{R}$.
6. Faire la liste de tous les cas qu'il faudrait envisager pour finir la preuve (n'énoncer que les résultats, sans preuve).

Exercice 2. Des équations fonctionnelles

Partie A. Une fonction sur les entiers

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, vérifiant

$$f(2) = 2 \text{ et } \forall p, q \in \mathbb{N},\ f(pq) = f(p)f(q).$$

Montrer par récurrence forte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.$$

Indication : Pour l'hérédité, on pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Partie B. Une fonction sur les réels

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que la fonction nulle (*i.e.* la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) est solution.

On suppose donc maintenant que la fonction est non nulle.

2. Écrire la formule logique correspondant à "f est non nulle".
3. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   Indication : Pour ce dernier, on pourra utiliser la question précédente.
4. En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n,$$
   puis que
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
6. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   Indication : Pour $x \leqslant y$, on pourra écrire $y = x + y - x$.
7. Montrer que pour tout réel x,
   $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
8. En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.$$
9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant f(x) < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$
10. Conclure : quelles sont toutes les fonctions vérifiant les conditions ?

Exercice 3. La fonction d'Ackermann

Pour chaque entier n, on note ξ_n la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} \xi_0(x) = 2^x \\ \xi_n(0) = 1 \\ \xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x)) \end{cases}$$

1. Calculer $\xi_0(2)$, $\xi_1(2)$ et $\xi_2(2)$.
2. Montrer que pour tous entiers n et x, on a
   $$\xi_n(x) > x.$$
   Indication : On pourra montrer par récurrence sur n la propriété P_n : $\forall x \in \mathbb{N},\ \xi_n(x) > x$, et ne pas hésiter à faire une récurrence sur x pour l'hérédité.
3. En déduire que pour tout n, ξ_n est strictement croissante, *i.e.* que
   $$\forall x \in \mathbb{N},\ \xi_n(x+1) > \xi_n(x).$$
4. Montrer que pour tous entiers n et x, on a
   $$\xi_{n+1}(x) \geqslant \xi_n(x).$$