Devoir surveillé 2

Angers Le Fresne : BCPST 1

13 Octobre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Une inégalité réelle

Dans cet exercice, on veut montrer qu'en prenant treize nombres réels quelconques, il y en a toujours deux parmi les treize, disons x et y, tels que

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}.$$

Soient donc $x_1, \ldots, x_{13} \in \mathbb{R}$, rangés par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{13}.$$

On notera $I = \{1, \ldots, 13\}$.

1. De combien de façons peut-on choisir deux réels parmi les treize ?
2. Pour tout $i \in I$, on pose $\theta_i = \arctan(x_i)$. Justifier que les θ_i sont rangés dans l'ordre croissant, sont distincts deux à deux, et sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, 12\}$ tel que
$$0 < \theta_{k+1} - \theta_k < \frac{\pi}{12}.$$
4. En notant que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, calculer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
Indication : on pourra montrer que si $\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$, α est solution de $\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha - 1 = 0$.
5. Conclure : montrer que x_{k+1} et x_k conviennent.
6. On suppose définie une fonction strictement croissante f de type `int` $\rightarrow$ `float`.
Écrire un script Python utilisant une boucle `while` qui affiche deux réels parmi $f(1), \ldots, f(13)$ qui vérifient la condition de l'exercice.

Exercice 2. Encore des sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

1. Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $\omega^j = 1$ si et seulement si $j = 0$ ou $j = n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk}$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'égalité suivante :

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1).$$

4. On veut calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}.$$

   (b) Conclure en choisissant une bonne valeur de z dans l'égalité $(\star)$.

5. On veut calculer la somme

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

   (b) Conclure en choisissant une bonne valeur de z dans l'égalité $(\star)$.

Exercice 3. Une inégalité triangulaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. On veut montrer que

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}.$$

On pose alors

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ z & \longmapsto & 1 - \frac{1}{1+|z|} \end{array}.$$

1. Justifier que g est bien définie, et que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = \frac{|z|}{1 + |z|}.$$

2. Montrer que $\forall u, v \in \mathbb{C},\ g(u+v) \leqslant g(u) + g(v)$.
3. En déduire que

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(z_k).$$

4. Montrer que

$$g\left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\right) \leqslant g\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right).$$

5. Conclure.