Devoir surveillé 3

Angers Le Fresne : BCPST 1

24 Novembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les quatre parties sont largement indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre souhaité, en admettant des résultats des parties précédentes.

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Formule de Stirling

Dans ce devoir, on veut trouver un équivalent de $n!$.

Partie A. Résultats préliminaires

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera α sa limite.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2.$$

Partie B. Un équivalent de la factorielle

On pose pour tout n
$$u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right).$$

On *admet* que pour tout n, $v_n \geqslant 0$.

3. En remarquant que
$$v_n = \ln\left(e^1\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right),$$
montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{4n^2}.$$
4. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
5. En calculant $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ comme une somme téléscopique, montrer que (u_n) converge aussi, vers un réel strictement positif.
6. En déduire qu'il existe $k > 0$ tel que
$$n! \sim kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Partie C. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

7. Calculer W_0 et W_1.
8. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
9. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}),$$

   et en déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

10. En déduire que pour tout entier p,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

11. Montrer que

$$W_{2p}W_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \text{ et } W_{2p}W_{2p-1} = \frac{\pi}{4p}.$$

12. Montrer que

$$\lim_{p \to \infty} p\left(W_{2p}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

   Indication : on pourra encadrer W_{2p} avec la question 8.

Partie D. La formule de Stirling

13. Montrer que

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$