Devoir surveillé 3

Angers Le Fresne : BCPST 1

24 Novembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les quatre parties sont largement indépendantes, et pourront être traitées dans l'ordre souhaité, en admettant des résultats des parties précédentes.

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Formule de Stirling

1. On a pour tout $k \geqslant 2$
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$
Donc la suite est majorée, et elle est trivialement croissante. Elle converge donc.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$
La fonction est donc croissante, et vaut 0 en 0. Elle est donc positive.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{aligned}
\exp(v_n) &= \frac{u_n}{u_{n+1}} \\
&= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}e^{-n-1}} \\
&= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \frac{n!}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n-1}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^1
\end{aligned}$$
D'où le résultat cherché.
v_n est positif par hypothèse, et
$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(e^1 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4n^2}
\end{aligned}$$

4. Posons $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. La suite (w_n) est croissante, et
$$w_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \alpha.$$
La suite (w_n) est donc majorée, et donc converge.

5. D'un autre côté, on a aussi
$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_k) - \ln(u_{k+1}) = \ln(u_1) - \ln(u_n).$$
Comme (w_n) converge, $(\ln(u_1) - \ln(u_n))$ aussi, et donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une limite ℓ.
La fonction exp étant continue, la suite (u_n) converge donc, vers $e^{\ell} > 0$.

6. On a donc en posant $k = e^{-\ell}$
$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{k},$$
puis en isolant le $n!$,
$$n! \sim kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

7. On a clairement
$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
On a aussi
$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

8. La fonction sin prenant ses valeurs entre 0 et 1 sur $[0, \pi/2]$, on a pour tous n et t
$$\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t).$$
Par croissance de l'intégrale, la suite (W_n) est donc décroissante.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \sin^{n+1}(t)$. Alors par intégration par parties, on a
$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$
On retrouve donc directement le résultat voulu.

10. Montrons-le par récurrence. L'initialisation est donnée par la question 7. Soit donc $p \in \mathbb{N}$, et supposons les formules vraies pour p.
On a alors
$$\begin{aligned}
W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \\
&= \frac{(2p+1)!\pi}{2^{2p+2}p!(p+1)!} \\
&= \frac{(2p+2)!\pi}{(2p+2)2^{2p+2}p!(p+1)!} \\
&= \frac{(2p+2)!\pi}{2^{2p+3}(p+1)!^2}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
W_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2p+1} p!(p+1)!}{(2p+1)!(2p+3)} \\
&= \frac{2^{2p+1} p!(p+1)!(2p+2)}{(2p+3)!} \\
&= \frac{2^{2p+2}(p+1)!^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

Par théorème de récurrence, on a donc bien le résultat voulu.

11. En utilisant les résultats de la question précédente, on a donc :

$$W_{2p} W_{2p+1} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2(2p+1)}.$$

De même,

$$W_{2p} W_{2p-1} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{2p\pi}{8p^2} = \frac{\pi}{4p}.$$

12. Par décroissance de la suite, on a pour tout p

$$W_{2p+1} \leqslant W_{2p} \leqslant W_{2p-1},$$

et donc

$$p W_{2p} W_{2p+1} \leqslant p W_{2p}^2 \leqslant p W_{2p} W_{2p-1}.$$

En utilisant la question précédente, on a donc

$$\frac{p\pi}{4p+2} \leqslant p W_{2p}^2 \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Par théorème d'encadrement des limites, la limite cherchée existe bien et vaut $\frac{\pi}{4}$.

13. On a donc

$$W_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}.$$

En utilisant la formule de la question 6, on a aussi

$$\begin{aligned}
W_{2p} &\sim \frac{\pi}{2^{2p+1}} \frac{k(2p)^{2p+\frac{1}{2}} e^{-2p}}{k^2 p^{2p+1} e^{-2p}} \\
&= \frac{\pi}{k\sqrt{2}\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

On a donc nécessairement

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} \sim \frac{\pi}{k\sqrt{2}\sqrt{p}},$$

et donc

$$\lim_{p\to\infty} \frac{k\sqrt{2}\sqrt{p}}{2\sqrt{p}\pi} = \lim \frac{k}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Finalement, on trouve bien $k = \sqrt{2\pi}$.