Devoir surveillé 4

Angers Le Fresne : BCPST 1

10 Décembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Exercice : Matrices pseudo-inversibles

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite *pseudo-inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} AB & = & BA \\ ABA & = & A \\ BAB & = & B \end{array}\right.$$

On dit alors que B est une *pseudo-inverse* de A.

1. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudos-inverses de A.
   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_2 = AB_1$.
   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

   Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse appelé la pseudo-inverse de A et notée A^*.

2. Quelques exemples.
   (a) Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
   (b) Montrer que tout matrice M inversible d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
   (c) Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible. On suppose que N est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe un entier p non nul tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.
      i. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a
      $$N^*N^k = N^{k-1}.$$
      ii. En déduire que N est la matrice nulle, c'est-à-dire que $p = 1$.
      iii. Que peut-on en déduire de la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

3. Cas d'une matrice diagonalisable.
   (a) ($\star$) Montrer que tout matrice diagonale d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.
   (b) Soit A une mattrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et déterminer sa peudo-inverse en fonction de P et A^*.
   (c) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer que P est inversible, et calculer son inverse. Montrer que A n'est pas inversible.
      ii. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, et préciser ses coefficient diagonaux.
      iii. En déduire que A est pseudo-inversible, et déterminer sa pseudo-inverse.

Exercice 2. Exercice : Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positions A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :
   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leqslant S_n - B \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (e) Écrire une fonction Python qui prend en paramètre r de type `float`, et qui renvoie le plus petit rang n tel que $S_n \geqslant r$.
2. Recherche d'une équivalent de S_n.
   (a) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   (b) En déduire que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.
3. Étude asymtotique de la suite u définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
   (a) ($\star\star$) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
   (b) En déduire que la suite u converge.

   Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ.
4. La série harmonique.
   Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
   $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$
   (b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par
   $$u_n = H_n - \ln(n) \text{ et } v_n = H_n - \ln(n+1).$$
   Montrer que l'une est croissante, et l'autre décroissante.
   (c) En déduire qu'elles convergent toutes les deux vers la même limite, qu'on note γ.
5. Une application. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k}$.
   (a) ($\star\star$) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a
   $$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   (b) ($\star$) D'après la question 4b, il existe un réel γ et une suite (ε_n) qui tend vers 0 tels que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$.
   En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (c) En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (d) Que peut-on en déduire au sujet de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?