Devoir surveillé 5

Angers Le Fresne : BCPST 1

2 Février 2019

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Polynômes de Hilbert

Partie A. Résultat préliminaire

1. Si $n = 0$, on veut montrer que tout polynôme constant s'écrit en fonction de P_0 qui est de degé 0.
   Soit donc $P = \lambda$ un polynôme constant. On écrit $P_0 = \mu$. On note alors que
   $$P = \frac{\lambda}{\mu} P_0,$$
   μ étant non nul comme coefficient dominant de P_0.

2. (a) Écrivons
   $$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k,$$
   avec $a_{n+1} \neq 0$.
   Par hypothèse de récurrence, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ étant échelonnée, on a
   $$P_{n+1} - a_{n+1} X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k,$$
   les $\mu_k \in \mathbb{R}$.
   On a donc
   $$X^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} \left(P_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k \right),$$
   et on a donc bien le résultat en posant
   $$\alpha_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} \text{ et } \alpha_k = -\frac{\mu_k}{\alpha_k}.$$

   (b) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe μ_k tels que
   $$P - a_{n+1} X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k.$$
   Par la question précédente, on a des α_k tels que
   $$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k.$$
   Il suffit de rassembler pour obtenir
   $$\begin{aligned} P &= a_{n+1} X^{n+1} + P - a_{n+1} X^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k + \sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k \end{aligned}$$
   où $\lambda_{n+1} = \alpha_{n+1}$ et les autres $\lambda_k = \alpha_k + \mu_k$.

3. On a donc bien montré par récurrence la propriété "Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes, pour tout polynôme P, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k.\text{''}$$

Partie B. Polynômes de Hilbert

4. Il est clair que le degré de H_n est n.

5. (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dans le produit définissant $H_n(k)$, on aura donc un facteur de la forme $(k-k) = 0$, et donc le résultat est nul.

   (b) Soit $k \geqslant n$. On note alors que

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!} \\ &= \frac{k!}{(k-n)!n!} \\ &= \binom{k}{n} \end{aligned}$$

   (c) Soit $k < 0$. Alors

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(-k)(-k+1)\cdots(-k+(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-n)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n-k-1)!}{(-k-1)!n!} \\ &= (-1)^n \binom{n-k-1}{n} \end{aligned}$$

6. Le résultat direct est clair. Pour la réciproque, le polynôme $H_2 = \frac{X(X-1)}{2} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$ est un contre-exemple.

7. On sait que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$, et c'est donc en particulier vrai pour les entiers de $[\![0, n]\!]$.

8. Supposons $(\mathrm{i}ii)$. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$P(k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k(p)$$

   qui est un entier par la question 5.

9. (a) La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est échelonnée, donc par la partie A, les λ_k existent bien.

   (b) Calculons $P(0)$

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k(0) = \lambda_0 H_0(0) = \lambda_0.$$

   Comme $P(0) \in \mathbb{Z}$, on a bien $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$.
   Supposons que tous les λ_k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$ sont des entiers. Calculons $P(p)$

$$P(p) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k(p) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k H_k(p)$$

   et donc

$$\lambda_p = P(p) - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k H_k(p) \in \mathbb{Z}.$$

   On a donc bien le résultat voulu.

Exercice 2. Somme des carrés des inverses

Partie A. Python

1. On peut écrire le code suivant

```
def fonction(n)=
  l= []
  for i in range(n):
    l.append(l[-1] + 1/(i**2))
  return l
```

Partie B. Étude de la fonction cotangente

2. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} 1+\operatorname{cotan}^2(t) &= 1+\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(t)} \end{aligned}$$

3. Il suffit d'étudier les fonctions $\varphi : t \mapsto t - \sin(t)$, qui est clairement positive, et $\psi : t \mapsto \tan(t) - t$, qui l'est aussi.

4. Tout étant strictement positif dans l'inégalité précédente, on peut élever au carré et prendre l'inverse :

$$\frac{1}{\sin^2(t)} \geqslant \frac{1}{t^2} \geqslant \frac{1}{\tan^2(t)},$$

et il suffi d'utiliser la question 2 pour avoir le résultat.

Partie C. Calcul de la somme

5. On a

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) &= \Im(e^{(2n+1)it}) \\ &= \Im((\cos(t)+i\sin(t))^{2n+1}) \\ &= \Im\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k \sin^k(t)\cos^{2n+1-k}(t)\right) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\sin^k(t)\cos^{2n+1-k}(t) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n+1}{2\ell+1}(-1)^{\ell}\sin^{2\ell+1}(t)\cos^{2(n-\ell)}(t) \qquad (k=2\ell+1) \end{aligned}$$

et on retrouve bien le résultat demandé.

6. On a donc

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(t)\cos^{2(n-k)}(t) \\ &= \sin^{2n+1}(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\frac{\cos^{2(n-k)}(t)}{\sin^{2(n-k)}(t)} \\ &= \sin^{2n+1}(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\operatorname{cotan}^{2(n-k)}(t) \end{aligned}$$

On peut donc choisir

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}.$$

7. Le coefficient dominant de P_n est, pour $k=0$: $-(2n+1)$. P_n est donc de degré n.

8. D'après la question 6, tous les
$$x_k = \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$
sont racines de P_n. Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il y en a exactement n (pour k entre 1 et n), et donc chacune de ces racines et de multiplicité 1.

9. On sait que la somme des racines est l'opposé du coefficient de X^{n-1} de P_n divisé par son coefficient dominant. Donc
$$x_1 + \ldots + x_n = -\frac{-\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{1}{3}n(2n-1).$$

10. Écrivons l'inégalité de la question 4 pour les $\frac{k\pi}{2n+1}$:
$$x_k \leqslant \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant 1 + x_k.$$
En sommant ces inégalités pour k de 1 à n, on a donc
$$\frac{1}{3}n(2n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant n + \frac{1}{3}n(2n-1).$$

11. En divisant par $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$, on obtient
$$\frac{1}{3}n(2n-1)\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \left(n + \frac{1}{3}n(2n-1)\right)\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}.$$
On a à gauche et à droite des polynômes, dont la limite est donnée par les termes de plus grand degré. La limite de gauche est donc $\frac{\pi^2}{6}$, et celle de droite aussi.

   Par théorème d'encadrement des limites, la suite proposée converge, vers $\frac{\pi^2}{6}$.