Méthodes de calcul et raisonnement

Corrigé Agro

2015

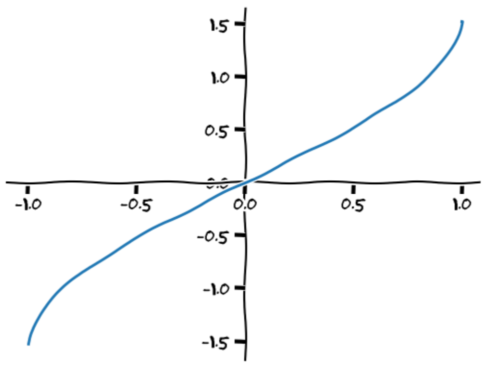
Partie I

1. La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Par théorème de la bijection, sin induit donc une bijection.

2. On a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, et donc $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

   De la même façon, on trouve $A\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}$.

3. On a



4. On a pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos(A(x))^2 = 1 - \sin(A(x))^2$, et donc

$$\cos^2(A(x)) = 1 - x^2.$$

   Or pour $x \in [-1,1]$, $A(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos(A(x)) \geqslant 0$. On retrouve donc bien le résultat voulu.

5. La fonction sin est dérivable, et sa dérivée cos ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, A est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout x dans cet intervalle

$$A'(x) = \frac{1}{\cos(A(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. (a) On a pour au voisinage de 0

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \mathrm{o}(t).$$

   (b) On a donc au voisinage de 0,

$$A'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right),$$

   et donc, comme $A(0) = 0$,

$$A(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Partie II

1. On a clairement, si $t \leqslant 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = 0$, et si $t \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = 1$.

   Si $t \in [0,1]$, alors
$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(\Theta \leqslant A(t)) = \frac{2}{\pi}A(t).$$

2. La fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$, sauf peut-être en 0 et 1. De plus, elle est continue en 0 et 1, et donc elle est continue sur R.

   X est donc une variable à densité, dont une densité est F'_X là où elle est dérivable. On retrouve bien la densité proposée.

3. (a) Il est clair que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\frac{2}{\pi}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et donc par théorème de transfert, X admet une espérance, qui vaut
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\frac{2}{\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

   (b) Si l'angle de la maille est pris aléatoirement, alors l'aire de cette maille sera en moyenne $\frac{2ab}{\pi}$.

4. On va plutôt utiliser le théorème de transfert : l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\frac{2}{\pi}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc X^2 admet une espérance, et
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\frac{2}{\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

5. (a) Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\pi}$, et par indépendance, on a $\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2-8}{2\pi^2 n}$.

   (b) Pour une variable T admettant une espérance et une variance, on a pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{\varepsilon^2}.$$

   (c) On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(T) - \varepsilon \leqslant M_n \leqslant \mathbb{E}(T) + \varepsilon)) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

   En prenant $\varepsilon = \sqrt{20\mathbb{V}(X)}$, on trouve alors l'intervalle de confiance $[\mathbb{E}(X) - \sqrt{20\mathbb{V}(X)}, \mathbb{E}(X) + \sqrt{20\mathbb{V}(X)}]$.

6. (a) On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{\pi}A\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} + \frac{1}{3\pi}\frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

   Donc
$$\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{2}{\pi}}{n} \sim \frac{\frac{1}{3\pi}}{n^3}.$$

   (b) i. On a pour tout n
$$p_n = 1 - \frac{2}{\pi}A\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

   Par continuité de A en 1, on a donc
$$p_n \to 0.$$

   ii. On a donc
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = \sin\left(A\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

   iii. À l'ordre 2, on a
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

iv. On a pour tout n

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{n} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}p_n\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) \\ &= 1-\frac{\pi^2}{8}p_n^2+\mathrm{o}\left(p_n^2\right) \end{aligned}$$

On a donc $\frac{\pi^2}{8}p_n^2 \sim \frac{1}{n}$, et donc

$$p_n \sim \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}{\sqrt{n}}.$$

Partie III

1. On a pour tout x,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= 1-2x^2 \\ f_2(x) &= 1-8x^2+8x^4 \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

   (b) On a donc pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x)+f_n(x) &= \cos(2(n+1)A(x)+2A(x))+\cos(2(n+1)A(x)-2A(x)) \\ &= 2\cos(2A(x)\cos(2(n+1)A(x)) \end{aligned}$$

   On retrouve alors bien le résultat demandé.

3. Soit φ_n la proposition « Il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que $\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = P_n(x)$ ».
   - On a bien φ_0 et φ_1.
   - Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose φ_n et φ_{n+1}.
     Alors par la question III2b, on a

$$f_{n+2}(x) = 2(1-2x^2)P_{n+1}(x)-P_n(x),$$

     et on a donc bien un polynôme de degré $2n+4$.

   Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

4. (a) On a pour tout $x \in]-1,1[$

$$f_n'(x) = \frac{-2n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(2nA(x))$$

   et

$$f_n''(x) = \frac{-2nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(2nA(x))-\frac{4n^2}{1-x^2}f_n(x).$$

   (b) On a

$$\begin{aligned} (x^2-1)f_n''(x)+xf_n'(x)-4n^2f_n(x) &= \frac{2nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(2nA(x))+4n^2f_n(x)-\frac{2nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(2nA(x))-4n^2f_n(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Partie IV

1. Soit $P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X]$. Alors $(X^2-1)P''$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$, et XP' de degré inférieur ou égal à $2n$.

   La somme de deux est donc un polynôme de $\mathbf{R}_{2n+1}[X]$.

2. (a) On a $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = X$, $\phi(X^2) = 4X^2 - 2$ et $\phi(X^3) = 9X^3 - 6X$. On a alors la matrice

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (b) La matrice est triangulaire, et donc on peut lire les valeurs propres sur la diagonale : $0,\ 1,\ 4$ et 9. La matrice M a donc 4 quatre valeur propres, en dimension 4, et donc est diagonalisable.
   On a alors

   $$E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_9 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. On a pour tout k : $\phi(X^k) = -k(k-1)X^{k-2} + k^2X^k$. On en déduit la matrice

   $$\mathrm{mat}\,\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & k^2 & \ddots & -(2n+1)(2n) \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & (2n+1)^2 \end{pmatrix}.$$

4. Les valeurs propres se lisent donc sur la diagonale :

   $$\mathrm{Spec}(\phi) = \{k^2 \mid k \in [\![0, 2n+1]\!]\}.$$

   L'endomorphisme en dimension $2n+2$ a donc $2n+2$ valeurs propres, et donc est diagonalisable.

5. On note que, par II4b, $\phi(P_k) = (2k)^2P_k$. Comme $E_{(2k)^2}$ est de dimension 1, on a donc

   $$E_{(2k)^2} = \mathrm{Vect}(P_k).$$