Banque « Agro-Véto »
A BCPST - 0424

MATHÉMATIQUES
MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 :

I. Résultats préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\forall j \in [\![0, p]\!], \binom{p}{j}\frac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1}\frac{1}{p+1}$.

(b) Montrer que $\forall j \in [\![0, p-1]\!], \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner, sans justification, une fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier $i > 1$, on a :

$$\int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

(b) Justifier l'équivalent : $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

4. Calculer $\mathrm{P}(X_{(1)} > x)$ pour tout x réel positif et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

5. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \mapsto n\,\lambda\, e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1}\ 1_{\mathbb{R}^+}(x)\cdot$$

6. En déduire que :

$$\mathrm{E}(X_{(n)}) = n\,\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-(1+j)\lambda x} \mathrm{d}x$$

puis, en utilisant les résultats de la partie I, que :

$$\mathrm{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}\cdot$$

7. Dans cette question on veut prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\cdot$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$.

(b) En utilisant les résultats de la partie I, prouver le résultat souhaité par récurrence.

8. En déduire un équivalent de $\mathrm{E}(X_{(n)})$.

On définit la suite $u = \left(\lambda \mathrm{E}(X_{(n)}) - \ln(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

9. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

10. En déduire que la suite u est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

III. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. On définit la fonction f par :

$$f\ :\ x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp\left[-\lambda \exp(-x)\right].$$

11. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.
On appellera cette loi *la loi de Gumbel de paramètre λ*.
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = \exp(-x)$.

12. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

14. Montrer que si $\lambda = 1$, alors la suite $\left(X_{(n)} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.

Problème 2 :

Pour tout entier r non nul, on considère sur $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire $\langle X, Y\rangle$ est égal à $\sum_{k=1}^{r} x_k\, y_k$.

Comme le produit matriciel $X^T Y$ est égal à la matrice $\left(\sum_{k=1}^{r} x_k\, y_k\right) \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on identifiera $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, en notant $\langle X, Y\rangle = X^T Y$.
De même, la norme euclidienne de X sera définie par $\|X\| = \sqrt{X^T X}$.
Pour toute matrice M, on notera $\mathrm{Ker}(M)$ son noyau et $\mathrm{Im}(M)$ son image.

On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q.

15. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^T = B^T A^T$.

16. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^T aussi et que l'on a :

$$\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T.$$

17. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^T A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^T A^T A X$ lorsque $X \in Ker\left(A^T A\right)$.

18. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.

19. Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^T A = PDP^{-1}$.
On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que les colonnes de A que l'on notera $C_1, C_2, \dots, C_p$ forment une famille libre.

20. Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, ..., C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^T A$ est inversible.

21. On considère la matrice $H = A(A^T A)^{-1} A^T$.

(a) Prouvez que $H^2 = H$ et $H^T = H$.

(b) Prouvez que $\mathrm{Ker}(H) = (\mathrm{Im}(H))^{\perp}$.

(c) Prouvez que $\mathrm{Ker}(H) = \mathrm{Ker}\left(A^T\right)$ puis que $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A)$.

On admet que cela prouve que l'application $p : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

Soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $g : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \|B - AX\|^2$.

22. Montrer que la fonction g admet un minimum global atteint en un unique point :

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

23. Simplifiez $\hat{X}$ lorsque $n = p$. Le résultat est-il cohérent ?

24. Que vaut $\hat{X}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

FIN DU SUJET