Agro - Mathématiques

Méthodes de calcul et raisonnement

2024

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\binom{p}{j}\frac{1}{1+j} &= \frac{p!}{(j+1)!(p-j)!} \\ &= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p+1-j-1)!} \\ &= \binom{p+1}{j+1}\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

   (b) C'est la formule du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}\binom{p}{j+1}+\binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)!(p-j-1)!}+\frac{p!}{j!(p-j)!} \\ &= \frac{p!(p-j+j+1)}{(j+1)!(p-j)!} \\ &= \binom{p+1}{j+1}\end{aligned}$$

2. Une densité est donnée par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si non}\end{cases}\end{array}$, la fonction de répartition par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si non}\end{cases}\end{array}$.

   La variable X admet alors une espérance et une variance, qui valent respectivement $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$.

3. (a) On a par décroissance de la fonction inverse, pour tout $t \in [i, i+1]$: $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{i}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors l'inégalité de gauche.
   On obtient de la même manière celle de droite.

   (b) On a $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})$. On en déduit

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to 1.$$

   On a donc bien l'équivalent demandé.

   (c) En sommant les inégalités obtenues à la question 3a pour i allant de 2 à n, on a donc par relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - 1 \leqslant \int_1^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

   On en déduit alors

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1.$$

   En divisant par $\ln(n)$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)},$$

et par théorème d'encadrement des limités, chaque côté convergeant vers 1 par la question 3b, on a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)} \to 1,$$

et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

4. Soit $x \geqslant 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(1)} > x) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}((X_k > x) \quad \text{par indépendance} \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda x} \\
&= e^{-n\lambda x}
\end{aligned}$$

Il est clair que $\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = 1$ si x est négatif, et donc $X_{(1)}$ a la même fonction de répartition qu'une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, donc $X_{(1)} \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

5. On calcule la fonction de répartition de $X_{(n)}$. Elle est clairement nulle sur $\mathbb{R}_-$. Soit alors $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x) \quad \text{par indépendance} \\
&= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n
\end{aligned}$$

On note que la fonction est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

La variable $X_{(n)}$ est donc une variable à densité, et une densité est donnée par la dérivée de la fonction de répartition. On trouve bien la densité proposée.

6. L'exponentielle étant positive, on a $xn\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \leqslant n\lambda x e^{-\lambda x}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ converge (on reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle).

Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la variable $X_{(n)}$ admet bien une espérance. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{(n)}) &= \int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \mathrm{d}x \\
&= n\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j e^{-j\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-(j+1)\lambda x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

par linéarité, toutes les intégrales étant convergentes.

En utilisant l'espérance d'une loi exponentielle, on reconnaît

$$\int_0^{+\infty} x e^{-(j+1)\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{(j+1)^2 \lambda^2}.$$

En utilisant le résultat de la question 1a, on retrouve le résultat proposé.

7. (a) En utilisant le binôme de Newton, la somme cherchée est nulle.

(b) Montrons-le donc par récurrence

- Pour $p = 1$, le résultat est évident.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on suppose le résultat vrai pour ce p. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat voulu.

8. On a donc

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \frac{\ln(n)}{\lambda}.$$

9. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\sim -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

La suite $u_n - u_{n+1}$ est donc positive à partir d'un certain rang, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, par théorème de comparaison des séries à termes positives, la série $\sum u_n - u_{n+1}$, et donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ convergent.

10. On a par somme téléscopique

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1} - u_i = u_n - u_1,$$

et donc la suite u converge.

11. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f est donnée par $F\colon x \mapsto e^{-\lambda e^{-x}}$, qui tend vers 1 en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.

Ainsi, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

La fonction f est donc bien une fonction de répartition.

12. Calculons la fonction de répartition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \geqslant e^{-x}) \\
&= e^{-\lambda e^{-x}}
\end{aligned}$$

Cette fonction de répartition est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc Y est bien une variable à densité, dont une densité est f : Y suit une loi de Gumbel.

13. On a
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{x+o(1/x)} \to e^x.$$

14. D'après la question 5, la fonction de répartition de la variable $X_{(n)} - \ln(n)$ vaut
$$x \mapsto \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[-\ln(n),+\infty[}(x).$$
Comme $-\ln(n) \to -\infty$, cette fonction de répartition converge donc vers
$$x \mapsto e^{-e^{-x}},$$
qui est la fonction de répartition d'une loi de Gumbel de paramètre 1.

15. Soient $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$. On a alors
$$\begin{aligned}(AB)^{\mathbf{T}}_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{j,k}Bk, i(B^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}})_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (B^{\mathbf{T}})_{i,k}(A^{\mathbf{T}})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} B_{k,i}A_{j,k}\end{aligned}$$
On a donc bien $(AB)^{\mathbf{T}} = B^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}}$.

16. On a
$$(M^{-1})^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}} = (MM^{-1})^{\mathbf{T}} = I^{\mathbf{T}} = I.$$
Ainsi, $M^{\mathbf{T}}$ est inversible, et son inverse vaut $(M^{-1})^{\mathbf{T}}$.

17. Il est clair que si $X \in \ker(A)$, alors $X \in \ker(A^{\mathbf{T}}A)$.
Réciproquement, soit $X \in \ker(A^{\mathbf{T}}A)$. Alors $A^{\mathbf{T}}AX = 0$, et donc $X^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}}AX = 0$.
On reconnait alors une norme : $\|AX\|^2 = 0$, et donc $AX = 0$; on a bien $X \in \ker(A)$.

18. La matrice $A^{\mathbf{T}}A$ est symétrique (par la question 15) et réelle, donc elle est diagonalisable par théorème spectral.

19. Avec la méthode usuelle, on trouve
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

20. La famille est libre, donc pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k C_k = 0 \Rightarrow \forall k,\ \lambda_k = 0$.
Soit alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans le noyau de A. On a $AX = \sum\limits_{k=1}^{p} x_i C_i = 0$, et donc tous les x_i sont nuls.
On a donc bien $\ker(A) = \{0\}$.
Par la question 17, le noyau de la matrice carrée $A^{\mathbf{T}}A$ est donc réduit à $\{0\}$, elle est donc inversible.

21. (a) On a

$$H^2 = A(A^{\mathbf{T}}A)^{-1}A^{\mathbf{T}}A(A^{\mathbf{T}}A)^{-1}A^{\mathbf{T}} = H$$

et

$$\begin{aligned} H^{\mathbf{T}} &= (A(A^{\mathbf{T}}A)^{-1}A^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} \\ &= A((A^{\mathbf{T}}A)^{-1})^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}} \quad \text{par la question 15} \\ &= A((A^{\mathbf{T}}A)^{\mathbf{T}})^{-1}A^{\mathbf{T}} \quad \text{par la question 16} \\ &= H \end{aligned}$$

(b) Soit $X \in \ker(H)$. Soit $Y \in \mathrm{Im}(H)$, $Y = HZ$. Alors

$$\begin{aligned} \langle Y, X \rangle &= (HZ)^{\mathbf{T}}X \\ &= Z^{\mathbf{T}}H^{\mathbf{T}}X \quad \text{(q. 15)} \\ &= Z^{\mathbf{T}}HX \quad \text{(q.21a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $X \in \mathrm{Im}(H)^{\perp}$.
Or $\dim \ker(H) = n - \dim \mathrm{Im}H = \dim \mathrm{Im}(H)^{\perp}$, et on a bien l'égalité voulue.

(c) Soit $X \in \ker(H)$. On a alors $A(A^{\mathbf{T}}A)^{-1}A^{\mathbf{T}}X = 0$, et en multipliant à gauche par $A^{\mathbf{T}}$, on a donc $A^{\mathbf{T}}X = 0$: $X \in \ker(A^{\mathbf{T}})$.
Soit maintenant $X \in \ker(A^{\mathbf{T}})$. Alors $A^{\mathbf{T}}X = 0$, et on a directement $HX = 0$: $X \in \ker H$.
Pour la deuxième égalité, on a clairement $\mathrm{Im}H \subseteq \mathrm{Im}A$. De plus, on a

$$\dim \mathrm{Im}H = n - \dim \ker H = n - \dim \ker A^{\mathbf{T}} = \mathrm{rg}(A^{\mathbf{T}}) = \mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}A.$$

On a donc bien l'égalité voulue.

22. On note alors que $A\hat{X}$ est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}A$, et donc minimise la valeur de $g(X)$.

23. Si $n = p$, alors la matrice A est inversible par la question 20. On a alors

$$\hat{X} = A^{-1}(A^{\mathbf{T}})^{-1}A^{\mathbf{T}}B = A^{-1}B.$$

Dans ce cas, on $g(\hat{X}) = 0$, qui est bien minimal, la norme étant toujours positive.

24. On trouve $\hat{X} = \frac{2}{3}\binom{1}{2}$.