1 Généralités sur les ensembles et les fonctions. Nombres complexes

1.1 Théorie naïve des ensembles

1.1.1 Généralités

On considèrera souvent dans ce cours des *ensembles* ; on pourra visualiser un ensemble comme une "collection" d'objets mathématiques.

On écrira alors $x \in E$ pour indiquer que l'objet x est un des objets de la collection E, et on dira que *x appartient à E*.

Il y a trois façons différentes de décrire des ensembles :

- En listant explicitement ses éléments, entre accolades et séparés par des virgules ou points-virgules

  Exemple :

- En listant ses éléments comme l'image d'un ensemble par une fonction

  Exemple :

- En donnant une propriété qui caractérise ses éléments

  Exemple :

Un ensemble particulier, appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$, sera l'ensemble qui ne contient aucun élément. On admet qu'il est unique.

Définition 1.1

Soient A et B deux ensembles.

On dit que noté $A \subseteq B$ si

On dit que A et B sont égaux s'ils sont inclus l'un dans l'autre :

1.1.2 Opérations sur les ensembles

Étant donnés des ensembles, on peut en construire d'autres avec des opérations.

Définition 1.2

Soient A et B deux ensembles inclus dans un ensemble E.

On appelle *intersection de A et B*, notée l'ensemble des éléments qui sont

$$A \cap B =$$

On appelle *union de A et B*, notée l'ensemble des éléments qui sont

$$A \cup B =$$

On généralisera facilement à l'intersection ou l'union de plus de deux ensembles.

Définition 1.3

Soient A et E deux ensembles, avec $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E*, noté l'ensemble des éléments

$$\overline{A} =$$

Si B n'est pas nécessairement inclus dans A, on note l'ensemble des éléments

$$A \backslash B =$$

Définition 1.4

Soient A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien de A et B*, noté l'ensemble des

$$A \times B =$$

De même, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

> **NOTA :** Attention à ne pas confondre le *couple* (a, b), élément d'un produit cartésien, ou l'ordre des élément est important, et la *paire* $\{a, b\}$ qui est un ensemble de deux éléments, dont l'ordre n'importe pas ; en toute généralité, on a

1.2 Généralités sur les fonctions

Les mathématiques utilisent principalement la notion de *fonctions*.

Définition 1.5

On appelle *application* (ou fonction) tout objet mathématique f défini par :

-
-
-

On notera alors $f(x)$ l'élément y de F correspondant à $x \in E$. $f(x)$ s'appelle de x, et x s'appelle un[*] de y.

On note une telle application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} .$$

Définition 1.6

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *composée de f et g* l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Définition 1.7

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors

*. Attention, il n'est pas nécessairement unique

- on appelle *image directe* de A par f l'ensemble

  $f(A) =$

- on appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) =$$

On a alors trois propriétés des fonctions importantes :

Définition 1.8

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est *injective* (ou que f est une *injection de E dans F*) si

- On dit que f est *surjective* (ou que f est une *surjection de E dans F*) si

- On dit que f est *bijective* (ou que f est une *bijection de E dans F*) si

On peut aussi caractériser la bijectivité par l'existence d'une réciproque :

Proposition 1.9

Une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Dans ce cas, g s'appelle *réciproque* de f et se note f^{-1}.

1.3 Nombres complexes

Nous allons dans cette section rappeler quelques propriétés des nombres complexes. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient un élément i vérifiant $i^2 = -1$, et tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! a, b \in \mathbb{R},\ z = a + ib.$$

Dans ce cas, a s'appelle *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$, et b s'appelle *partie imaginaire* de z, notée $\Im(z)$ ou $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 1.10

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, $a, b \in \mathbb{R}$.

On appelle *conjugué de* z le nombre complexe

On appelle *module de* z le réel positif

Les nombres complexes de module 1 peuvent tous s'écrire sous la forme

$$z =$$

Définition 1.11

Dans ce cas, θ s'appelle *argument de* z. Cet argument n'est pas unique.

Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle *argument de* z tout argument de $\frac{z}{|z|}$.

On rappelle alors les formules d'Euler et de Moivre :

Théorème 1.12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$\cos(\theta) =$ et (Formule d'Euler).

$\forall n \in \mathbb{Z},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n =$ (Formule de Moivre).

Ces deux formules peuvent notamment être utilisées pour linéariser ou délinéariser des fonctions trigonométriques.

On rappelle enfin le résultat concernant la résolution d'équations du second degré à coefficients réels :

Proposition 1.13

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors les solutions de l'équation d'inconnue z

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont données par, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Signe de Δ	Solutions de l'équation
$= 0$	
> 0	
< 0	

1.4 Exercices

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Calculer $f(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f induit une bijection de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$.

Exercice 2

Soient E, F, G non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que

- Si $g \circ f$ injective alors f injective
- Si $g \circ f$ surjective alors g surjective

Exercice 3

Linéariser les expressions suivantes :

- $\sin^2(\theta)$
- $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$
- $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$(z-1)^n = (z+1)^n.$$

Exercice 5

Soient u, v deux nombres complexes de module 1. Montrer que si $2 + uv$ est de module 1, alors $uv = -1$.

Que dire de la réciproque ?

Exercice 6

Soit $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$. Le but est de montrer que α est irrationel, *i.e.* ne s'écrit pas comme une fraction d'entiers.

1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.
2. Montrer que α est rationnel si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1+2i\sqrt{2})^n$ peut s'écrire $a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont deux entiers tels que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
4. Conclure.