

Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Rappels sur les matrices

10.1.1 Opérations sur les matrices

Définition 10.1

On appelle *matrice* à n lignes et p colonnes tout tableau de nombres de $\mathbb{K}$ de la forme

Si une matrice A est de la forme précédente, on écrira $A =$

On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.

Définition 10.2

On distingue quelques matrices particulières :

- La matrice $0_{n,p}$ est
- Une *matrice ligne* est
- Une *matrice colonne* est
- Une *matrice carrée* est

Définition 10.3

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$.

On définit l'addition de A et B , notée $A + B$, la matrice

$$A + B =$$

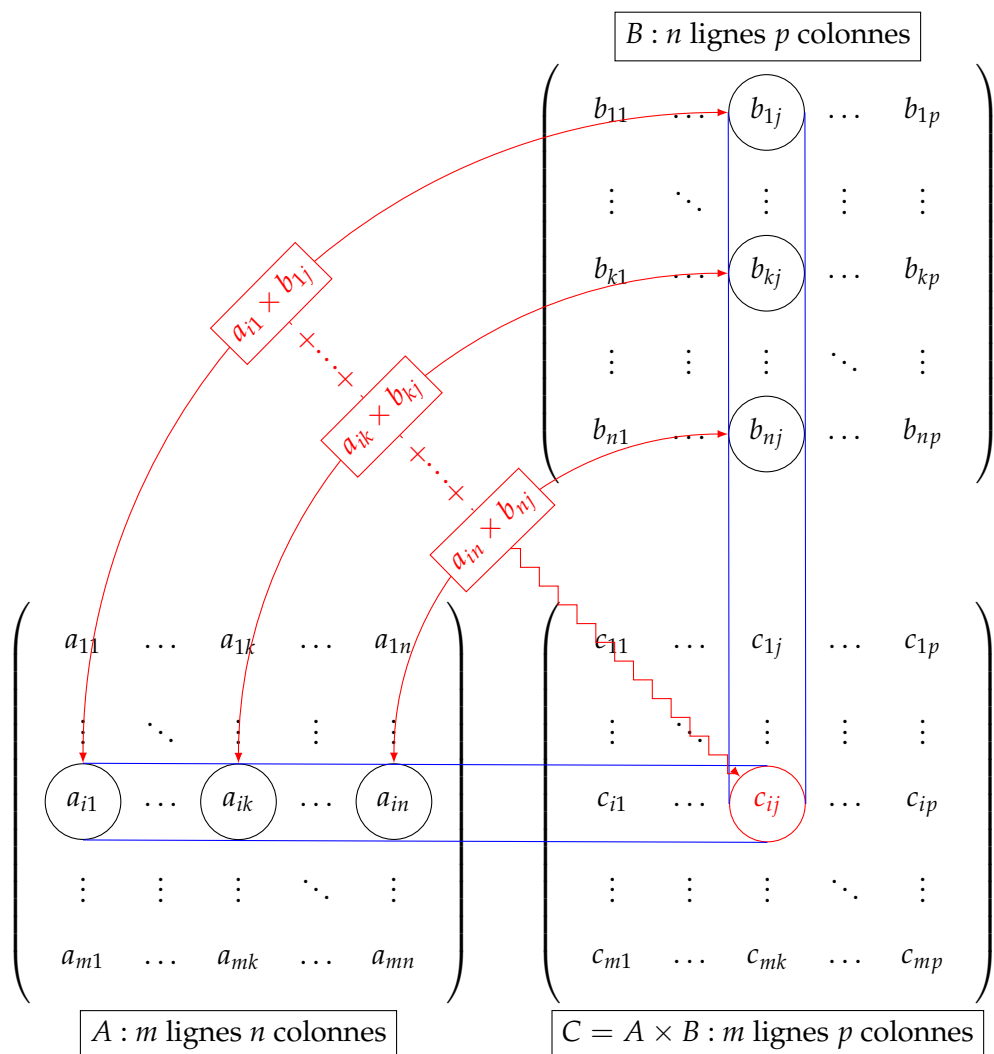
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit de A par λ , noté λA la matrice

$$\lambda A =$$

Définition 10.4

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ deux matrices. Alors le produit de A et B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice de dont le coefficient (i, j) est donné par la formule

$$(AB)_{ij} =$$

**Définition 10.5**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de A* , notée A^T la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

10.1.2 Matrices carrées**Définition 10.6**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est :

- *diagonale* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont sur la diagonale, *i.e.*

On note parfois $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

- *triangulaire supérieure* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessus de la diagonale, *i.e.*
- *triangulaire inférieure* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessous de la diagonale, *i.e.*

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice diagonale notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} =$$

Définition 10.7

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est

- symétrique si $A^T = A$, *i.e.*
- antisymétrique si $A^T = -A$, *i.e.*

$$\forall i, j,$$

$$\forall i, j,$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) de taille n .

Définition 10.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est *invertible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

On note alors $B = A^{-1}$.

On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors sont équivalents :

- (i) A est inversible
- (ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$
- (iii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$

Définition 10.10

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kp}x_p = b_k \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_p \end{cases}$$

Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

est appelée

Les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

sont appelées respectivement

Le système est alors équivalent à l'équation matricielle

Ceci permet de définir la notion de *rang* d'une matrice :

Définition 10.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de A*, noté $\text{rg}(A)$, le rang du système linéaire associé à A .

Théorème 10.12

Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'équation matricielle $AX = B$ (et donc le système associé) a une unique solution si et seulement si

Dans ce cas, cette unique solution est $X =$

En pratique, résoudre un système avec cette méthode est très difficile, puisqu'il est difficile de trouver l'inverse d'une matrice en général. On utilisera plutôt l'autre sens, avec le théorème :

Théorème 10.13

Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

10.2 Applications linéaires

Dans cette section, on va étendre la notion d'*application linéaire* vue l'an dernier dans le cadre des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$.

On se fixe des espaces vectoriels E , F et G .

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 10.14

Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est une *application linéaire* (ou *morphisme d'espaces vectoriels*) si

-
-

On note l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

NOTA : Plutôt que de démontrer les deux points, on peut les rassembler en un seul et montrer

EXEMPLES (FONDAMENTAUX) : • L'application nulle définie par $x \mapsto 0$ est une application linéaire.

- L'identité de E dans E est une application linéaire.
- Les homothéties vectorielles de E dans E définies par $x \mapsto \lambda x$ sont des applications linéaires.
- Les projections canoniques $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

EXEMPLES : • L'application $\begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ p & \longmapsto & p' \end{matrix}$ est une application linéaire.

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{matrix}$ est une application linéaire.

Proposition 10.15

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

-
- Pour tous $u_1, \dots, u_q \in E$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$, on a

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de choisir $x \in E$, et d'écrire

Pour le second point, une récurrence immédiate permet de montrer que pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_q \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$, puis d'utiliser la définition d'application linéaire. $\square$

Dans quelques cas particuliers, on donne des noms particuliers aux applications linéaires.

Définition 10.16

Une application linéaire de E dans E s'appelle un endomorphisme de E ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Une application linéaire de E dans F qui est bijective s'appelle un ;
on note $\text{GL}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F .

Un endomorphisme bijectif s'appelle un ; on note $\text{GL}(E)$ l'en-
semble des automorphismes de E .

Maintenant, on va voir que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est lui-même un espace vectoriel.

Proposition 10.17

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

-
-

Il est même stable par composition :

Proposition 10.18

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

De plus, si f est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Dans le cas d'automorphismes, on est aussi stable par inverse

Proposition 10.19

Si f et g sont des automorphismes de E , alors

Définition 10.20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On appelle *composée k fois de f* , notée f^k , l'application linéaire définie par

$$f^k =$$

avec la convention $f^0 = \text{id}$.

10.2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 10.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle *noyau* de f le sous-ensemble de E défini par
- On appelle *image* de f le sous-ensemble de F défini par

NOTA : En terme d'application, $\ker(f)$ est l'image réciproque de $\{0\}$ par f , et $\text{Im}(f)$ est l'image directe de E par f .

Proposition 10.22

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , et $\text{Im}(f)$ un sous-espace vectoriel de F .

Méthode

Pour trouver une base de $\ker(f)$:

-
-
-

Pour trouver une base de $\text{Im}(f)$:

-
-
-
-

Le noyau et l'image vont nous servir pour caractériser l'injectivité et la surjectivité (donc la bijectivité) d'une application linéaire.

Théorème 10.23

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- f est injective si et seulement si
- f est surjective si et seulement si

10.3 Applications linéaires en dimension finie

On suppose maintenant que E et F sont deux espaces de dimensions finies, respectivement n et p .

On peut alors facilement définir une application linéaire

Proposition 10.24

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F .

Alors il existe une unique application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i.$$

EXEMPLE : On définit une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\varphi(1) = 0, \varphi(X) = 1, \varphi(X^2) = 2X.$$

Alors cette application linéaire est bien définie : on a alors pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = P'$.

On peut donc définir entièrement une application linéaire en donnant simplement l'image des vecteurs d'une base de départ. En particulier, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est toujours une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, $\text{Im}(f)$ est toujours de dimension finie, et on définit

Définition 10.25

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *rang de u* la dimension de $\text{Im}(u)$.

EXEMPLE : Pour l'exemple précédent, on a donc $\text{rg}(\varphi) = 2$.

NOTA : D'après la remarque précédente, le rang d'une application linéaire est toujours inférieure à la dimension de l'espace de départ.

On peut alors caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application

Théorème 10.26

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $f(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$. Alors

- u injective si et seulement si
si et seulement si $\text{rg}(u) = n$;
- u est surjective si et seulement si
si et seulement si $\text{rg}(u) = p$;
- u est bijective si et seulement si
ment si $\text{rg}(u) = n = p$.

si et seule-

En particulier, si E et F ont même dimension, on a

$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$

On a alors une relation fondamentale entre certaines dimensions

Théorème 10.27 – du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\text{rg}(u) + \dim \ker(u) = \dim E.$$

10.4 Applications linéaires et matrices

Dans cette partie, on fixe $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectivement de E et F .

Définition 10.28

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle *matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$* la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
 \text{Base de départ } \mathcal{E} \\
 f(e_1) \quad f(e_2) \quad \cdots \quad f(e_k) \quad \cdots \quad f(e_n) \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pk} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow f_1 \\
 \leftarrow f_2 \\
 \\
 \leftarrow f_p
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Base d'arrivée } \mathcal{F}
 \end{array}$$

Si f est un endomorphisme, et qu'on regarde sa matrice dans la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, on notera $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Si aucune base n'est précisée, on parle implicitement des bases canoniques de E et F .

EXEMPLE : La matrice de l'exemple précédent dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\varphi(1) = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$, $\varphi(X) = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$ et $\varphi(X^2) = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2$.

Définition 10.29

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire de E dans F canoniquement associée à A* l'application linéaire définie par

où on identifie vecteur de E et matrice colonne.

On définit de la même façon les matrices de vecteurs dans des bases.

Définition 10.30

Soit $x \in E$. On appelle *matrice de x dans la base $\mathcal{E}$* , notée $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$

On peut alors facilement calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire, matriciellement.

Proposition 10.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $x \in E$. Alors

■

EXEMPLE : Calculons la dérivée du polynôme $P = 1 - X + 2X^2$. On a donc

$$\begin{aligned} \text{mat}(P') &= \text{mat}(\varphi(P)) \\ &= \text{mat}(\varphi) \text{mat}(P) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\varphi(P) = -1 + 4X$.

Les passages aux matrices se comportent bien vis-à-vis des opérations sur les applications linéaires.

Proposition 10.32

Soit $\mathcal{G}$ une base de G . Alors

- si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors
- si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

Proposition 10.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$ est inversible et dans ce cas

En particulier, un endomorphisme de E est un automorphisme si et seulement si sa matrice dans deux bases de E est inversible.

Les différentes notions de rang qu'on a vues sont compatibles :

Proposition 10.34

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit A la matrice de f dans n'importe quelles bases.

On a alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

10.5 Changements de bases

On verra dans un prochain chapitre qu'il peut être très pratique de choisir de bonnes bases pour écrire nos matrices d'endomorphismes (dans le meilleur cas, des bases où la matrice est diagonale).

Il est donc important de savoir passer d'une matrice d'un endomorphisme dans une base à une matrice dans une autre base. Commençons "à la main".

EXERCICE : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ par

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 2y).$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Il serait alors plus facile de connaître des "formules" pour pouvoir changer de bases.

Définition 10.35

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* la matrice notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coefficients des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisément, si pour tout j , $e'_j = p_{1,j}e_1 + \dots + p_{n,j}e_n$, alors

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} =$$

EXERCICE : Écrire la matrice de passage correspondant à l'exercice précédent.

On a alors la formule de changement de bases pour les matrices et les vecteurs :

Proposition 10.36

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse
- Changement de bases :

(i) Si $x \in E$, alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

(ii) Si $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) =$$

NOTA : On pourra retenir les formules (avec notations évidentes) :

$$X = PX' \text{ et } M = PM'P^{-1}.$$

NOTA : Un moyen mnémotechnique pour retenir ces formules est de les lire de droite à gauche :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

On part de la base $\mathcal{B}'$, puis par la matrice de passage, on repasse à la base $\mathcal{B}$.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

On part de la base $\mathcal{B}$, puis on passe à la base $\mathcal{B}'$; on regarde la matrice dans $\mathcal{B}'$, puis on repasse à $\mathcal{B}$.

EXERCICE : Calculer l'inverse de la matrice de passage de l'exercice précédent, et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Comme vu l'an dernier, changer de base permet donc de simplifier les matrices, et donc de simplifier les calculs d'inverse, de puissances, etc.

Définition 10.37

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables*

D'après ce qu'on vient de voir, les matrices dans deux bases différentes d'une même application linéaire sont donc semblables.

EXEMPLE : La seule matrice semblable à I_n est I_n . En effet, soit A semblable à I_n . On a alors $A = P^{-1}I_nP = I_n$.

Proposition 10.38

La relation de similitude est :

- réflexive :
- symétrique :
- transitive :

Démonstration. • On a

- On a, si $B = P^{-1}AP$,
- On a, si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$,

□

La réciproque de la remarque précédente est vraie :

Proposition 10.39

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont les matrices dans deux bases du même endomorphisme.

En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Démonstration. On a déjà vu, avec les formules de changement de bases, que deux matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

Réciproquement, soit A et B deux matrices semblables, $B = P^{-1}AP$. Alors, comme P est inversible, les colonnes de P forment une base de E , et donc P peut être vue comme une matrice de passage.

On sait de plus que le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente, quelque soit le choix de la base. Changer de base ne change donc pas le rang. □

10.6 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 , et en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 2

On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 , puis donner une relation entre N^2 , N et I_3 . N est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, N^n = u_n N + v_n I_3.$$

3. Donner une expression explicite de (u_n) et (v_n) , puis de N^n .

Exercice 3

Déterminer le rang de la matrice selon les valeurs de λ

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5 - \lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases indiquées :

1. $f(x, y) = (x + y, x + 2y, x + 3y)$, base de départ $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$
2. $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$, base de départ $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$.
3. $f(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$, base de départ $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-1, 1, -1, 0), (1, -1, 0, -1))$.

Exercice 5

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA , AGA et AHA .
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$ associe la matrice $u(S) = ASA$.
 - a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2$.
 - b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
 - c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Exercice 6

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle *trace de A* la somme des termes de la diagonale principale :

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

1. Montrer que $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une application linéaire.
2. Montrer que pour toutes matrices A et B , $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
3. En déduire que deux matrices semblables ont même trace, puis qu'on peut définir la trace d'un endomorphisme.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = I_n$.
5. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soient D et D_1 les applications définies par

$$\forall f \in \mathcal{E}, D(f) = f' \quad \text{et} \quad D_1(f) = \text{id} \times f.$$

- a) Montrer que D et D_1 sont des endomorphismes.
- b) Calculer $D \circ D_1 - D_1 \circ D$.
- c) Que peut-on en conclure sur $\mathcal{E}$?

Exercice 7

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{array}.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Déterminer le degré de $\varphi(P)$.
3. Déterminer le noyau de φ .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note φ_n la restriction de φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
 - a) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b) Déterminer la matrice de φ_n dans la base canonique.

Exercice 8

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subseteq \ker(f)$, et en déduire que $\text{rg}(f) \neq 3$.
2. Montrer que le rang de f ne peut être égal qu'à 1 ou 2.
3. Si $\text{rg}(f) = 1$, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si $\text{rg}(f) = 2$, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. Écrire en Python une fonction `f_a(x, y, z, a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$, le vecteur u étant de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.
2.
 - a) Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$.
 - b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\ker(f_a)$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2 . En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.

- a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E .
 - b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.
 - c) La matrice A est-elle inversible ?
5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.
 - b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x , I_3 et A .
 - c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x , n , I_3 et A .

Exercice 10

Soit $\Delta: \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant, calculer $\deg(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de Δ .
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

4. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$