10 Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Rappels sur les matrices

10.1.1 Opérations sur les matrices

Définition 10.1

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes* tout tableau de nombres de $\mathbb{K}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Si une matrice A est de la forme précédente, on écrira $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.

Définition 10.2

On distingue quelques matrices particulières :

- La matrice $\mathbf{0}_{n,p}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont 0.
- Une *matrice ligne* est un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- Une *matrice colonne* est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Une *matrice carrée* est un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Définition 10.3

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$.

On définit l'addition de A et B, notée $A + B$, la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

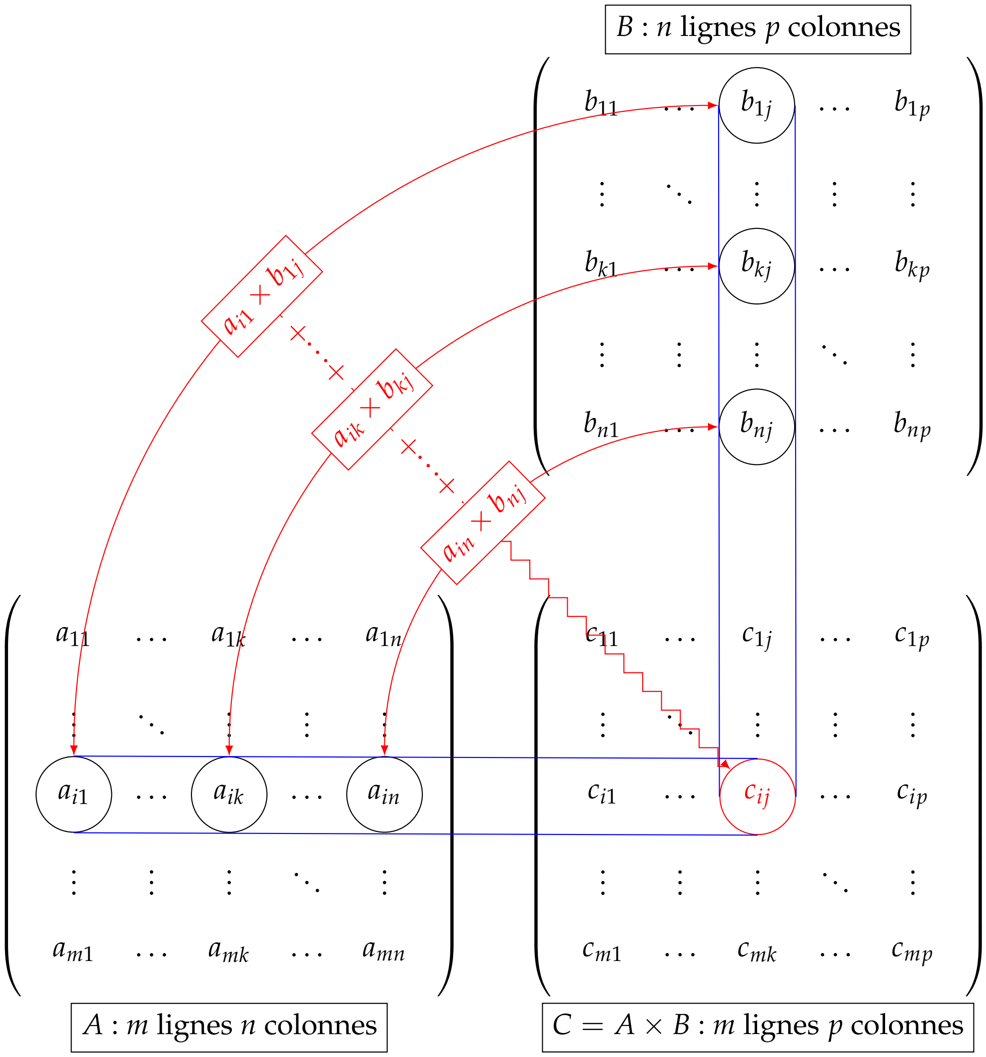
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit de A par λ, noté λA la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Définition 10.4

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ deux matrices. Alors le produit de A et B, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice de $\mathcal{M}_{m,p}$ dont le coefficient (i, j) est donné par la formule

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$



Définition 10.5

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de A*, notée $A^{\mathbf{T}}$ la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$(A^{\mathbf{T}})_{ij} = a_{ji}.$$

10.1.2 Matrices carrées

Définition 10.6

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est :

- *diagonale* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont sur la diagonale, *i.e.*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

  On note parfois $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

- *triangulaire supérieure* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessus de la diagonale, *i.e.*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- *triangulaire inférieure* si les seuls coefficients non nuls de la matrice sont au-dessous de la diagonale, *i.e.*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice diagonale notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \operatorname{diag}(1,1,\dots,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 10.7

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est

- symétrique si $A^{\mathsf{T}} = A$, *i.e.*

$$\forall i,j,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

- antisymétrique si $A^{\mathsf{T}} = -A$, *i.e.*

$$\forall i,j,\ a_{ij} = -a_{ji}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) de taille n.

Définition 10.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

On note alors $B = A^{-1}$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors sont équivalents :

(i) A est inversible

(ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$

(iii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$

Définition 10.10

On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kp}x_p & = & b_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_p
\end{array}\right.$$

Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice du système*. Les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

sont appelées respectivement *matrice des inconnues* et *matrice du second membre*.

Le système est alors équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Ceci permet de définir la notion de *rang* d'une matrice :

Définition 10.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *rang de A*, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang du système linéaire associé à A.

Théorème 10.12

Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'équation matricielle $AX = B$ (et donc le système associé) a une unique solution si et seulement si la matrice A est inversible.

Dans ce cas, cette unique solution est $X = A^{-1}B$.

En pratique, résoudre un système avec cette méthode est très difficile, puisqu'il est difficile de trouver l'inverse d'une matrice en général. On utilisera plutôt l'autre sens, avec le théorème :

Théorème 10.13

Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

10.2 Applications linéaires

Dans cette section, on va étendre la notion d'*application linéaire* vue l'an dernier dans le cadre des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$.

On se fixe des espaces vectoriels E, F et G.

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 10.14

Soit $f : E \to F$. On dit que f est une *application linéaire* (ou *morphisme d'espaces vectoriels*) si

- $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

NOTA : Plutôt que de démontrer les deux points, on peut les rassembler en un seul et montrer

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

EXEMPLES (FONDAMENTAUX) :

- L'application nulle définie par $x \in E \mapsto 0$ est une application linéaire.
- L'identité de E dans E est une application linéaire.
- Les homothéties vectorielles de E dans E définies par $x \in E \mapsto \alpha x, \alpha \in \mathbb{K}$ fixé sont des applications linéaires.
- Les projections canoniques $\pi_i : (x_1, \dots, x_n) \in E \mapsto x_i$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

EXEMPLES :

- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est une application linéaire.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ est une application linéaire.

Proposition 10.15

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- $f(0) = 0$
- Pour tous $u_1, \dots, u_q \in E$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k f(u_k).$$

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de choisir $x \in E$, et d'écrire

$$f(0) = f(x + (-1)x) = f(x) + (-1)f(x) = 0.$$

Pour le second point, une récurrence immédiate permet de montrer que pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_q \in E$, $f\left(\sum u_q\right) = \sum f(u_q)$, puis d'utiliser la définition d'application linéaire. □

Dans quelques cas particuliers, on donne des noms particuliers aux applications linéaires.

Définition 10.16

Une application linéaire de E dans E s'appelle un *endomorphisme* ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Une application linéaire de E dans F qui est bijective s'appelle un *isomorphisme* ; on note $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

Un endomorphisme bijectif s'appelle un *automorphisme* ; on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Maintenant, on va voir que l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est lui-même un espace vectoriel.

Proposition 10.17

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $f + g \in \mathcal{L}(E,F)$
- $\lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$

Il est même stable par composition :

Proposition 10.18

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

De plus, si f est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Dans le cas d'automorphismes, on est aussi stable par inverse

Proposition 10.19

Si f et g sont des automorphismes de E, alors $g \circ f$ et f^{-1} sont des automorphismes de E.

Définition 10.20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On appelle *composée k fois de f*, notée f^k, l'application linéaire définie par

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{id}$.

10.2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 10.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle *noyau* de f le sous-ensemble de E défini par

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0\}.$$

- On appelle *image* de f le sous-ensemble de F défini par

$$\operatorname{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E,\ f(u) = v\} = \{f(u) \mid u \in E\}.$$

NOTA : En terme d'application, $\ker(f)$ est l'image réciproque de $\{0\}$ par f, et $\operatorname{Im}(f)$ est l'image directe de E par f.

Proposition 10.22

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\operatorname{Im}(f)$ un sous-espace vectoriel de F.

Méthode

Pour trouver une base de $\ker(f)$:

- on prend un $u \in E$ quelconque
- on écrit le système $f(u) = 0$, qu'on échelonne
- on trouve une écriture vectorielle de $\ker(f)$, puis une base

Pour trouver une base de $\operatorname{Im}(f)$:

- on prend $v \in F$ quelconque
- on écrit le système $f(u) = v$ d'inconnue u, qu'on échelonne
- on cherche à quelles conditions le système admet une solution
- on trouve une écriture vectorielle de $\operatorname{Im}(f)$, puis une base

Le noyau et l'image vont nous servir pour caractériser l'injectivité et la surjectivité (donc la bijectivité) d'une application linéaire.

Théorème 10.23

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

10.3 Applications linéaires en dimension finie

On suppose maintenant que E et F sont deux espaces de dimensions finies, respectivement n et p.

On peut alors facilement définir une application linéaire

Proposition 10.24

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F.

Alors il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = f_i.$$

EXEMPLE : On définit une application linéaire $\varphi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\varphi(1) = 0,\ \varphi(X) = 1,\ \varphi(X^2) = 2X.$$

Alors cette application linéaire est bien définie : on a alors pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = P'$.

On peut donc définir entièrement une application linéaire en donnant simplement l'image des vecteurs d'une base de départ. En particulier, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est toujours une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est toujours de dimension finie, et on définit

Définition 10.25

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *rang de u* la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.

EXEMPLE : Pour l'exemple précédent, on a donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

NOTA : D'après la remarque précédente, le rang d'une application linéaire est toujours inférieure à la dimension de l'espace de départ.

On peut alors caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application

Théorème 10.26

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $f(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$. Alors

- u injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre dans F, si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = n$;
- u est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F, si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = p$;

- u est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F, si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = n = p$.

En particulier, si E et F ont même dimension, on a

$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$

On a alors une relation fondamentale entre certaines dimensions

Théorème 10.27 – du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rg}(u) + \dim\ker(u) = \dim E.$$

10.4 Applications linéaires et matrices

Dans cette partie, on fixe $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectivement de E et F.

Définition 10.28

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle *matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$* la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ définie de la façon suivante : la j-ième colonne de la matrice est la matrice colonne des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{F}$.

$$\begin{array}{cc}
\text{Base de départ } \mathcal{E} & \\
\begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_k) & & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pk} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_p \end{array}
\end{array}$$

Base d'arrivée $\mathcal{F}$

Si f est un endomorphisme, et qu'on regarde sa matrice dans la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, on notera $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Si aucune base n'est précisée, on parle implicitement des bases canoniques de E et F.

EXEMPLE : La matrice de l'exemple précédent dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\varphi(1) = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$, $\varphi(X) = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$ et $\varphi(X^2) = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2$.

Définition 10.29

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire de E dans F canoniquement associée à A* l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

où on identifie vecteur de E et matrice colonne.

On définit de la même façon les matrices de vecteurs dans des bases.

Définition 10.30

Soit $x \in E$. On appelle *matrice de x* dans la base $\mathcal{E}$, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$.

On peut alors facilement calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire, matriciellement.

Proposition 10.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $x \in E$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{F}}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

EXEMPLE : Calculons la dérivée du polynôme $P = 1 - X + 2X^2$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}(P') &= \mathrm{mat}(\varphi(P)) \\ &= \mathrm{mat}(\varphi)\,\mathrm{mat}(P) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\varphi(P) = -1 + 4X$.

Les passages aux matrices se comportent bien vis-à-vis des opérations sur les applications linéaires.

Proposition 10.32

Soit $\mathcal{G}$ une base de G. Alors

- si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) + \mu\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g).$$
- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$$
- si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f^n) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f)^n.$$

Proposition 10.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ est inversible et dans ce cas
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f^{-1}).$$

En particulier, un endomorphisme de E est un automorphisme si et seulement si sa matrice dans deux bases de E est inversible.

10.5 Changements de bases

On verra dans un prochain chapitre qu'il peut être très pratique de choisir de bonnes bases pour écrire nos matrices d'endomorphismes (dans le meilleur cas, des bases où la matrice est diagonale).

Il est donc important de savoir passer d'une matrice d'un endomorphisme dans une base à une matrice dans une autre base. Commençons "à la main".

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ par
$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 2y).$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Il serait alors plus facile de connaître des "formules" pour pouvoir changer de bases.

Définition 10.34

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coefficients des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisément, si pour tout j, $e'_j = p_{1,j}e_1 + \ldots + p_{n,j}e_n$, alors

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

EXERCICE : Écrire la matrice de passage correspondant à l'exercice précédent.

On a alors la formule de changement de bases pour les matrices et les vecteurs :

Proposition 10.35

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
- Changement de bases :
  (i) Si $x \in E$, alors
  $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$
  (ii) Si $f \in \mathcal{L}(E)$,
  $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\,P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

NOTA : On pourra retenir les formules (avec notations évidentes) :

$$X = PX' \text{ et } M = PM'P^{-1}.$$

NOTA : Un moyen mnémotechnique pour retenir ces formules est de les lire de droite à gauche :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

On part de la base $\mathcal{B}'$, puis par la matrice de passage, on repasse à la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

On part de la base $\mathcal{B}$, puis on passe à la base $\mathcal{B}'$; on regarde la matrice dans $\mathcal{B}'$, puis on repasse à $\mathcal{B}$.

Exercice : Calculer l'inverse de la matrice de passage de l'exercice précédent, et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Comme vu l'an dernier, changer de base permet donc de simplifier les matrices, et donc de simplifier les calculs d'inverse, de puissances, *etc.*

Définition 10.36

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

D'après ce qu'on vient de voir, les matrices dans deux bases différentes d'une même application linéaire sont donc semblables.

Exemple : La seule matrice semblable à I_n est I_n. En effet, soit A semblable à I_n. On a alors $A = P^{-1}I_nP = I_n$.

Proposition 10.37

La relation de similitude est :

- réflexive : A est semblable à A
- symétrique : si A et B sont semblables, B et A aussi
- transitive : si A et B sont semblables, et B et C sont semblables, alors A et C sont semblables

Démonstration.

- On a $A = I_n^{-1}AI_n$.
- On a, si $B = P^{-1}AP$, $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.
- On a, si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$.

□

La réciproque de la remarque précédente est vraie :

Proposition 10.38

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont les matrices dans deux bases du même endomorphisme.

En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Démonstration. On a déjà vu, avec les formules de changement de bases, que deux matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

Réciproquement, soit A et B deux matrices semblables, $B = P^{-1}AP$. Alors, comme P est inversible, les colonnes de P forment une base de E, et donc P peut être vue comme une matrice de passage.

On sait de plus que le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente, quelque soit le choix de la base. Changer de base ne change donc pas le rang. □

10.6 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3, et en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Réponse de l'exercice

On a

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A + 4I_3.$$

On a donc $\frac{1}{4}A(A^2 - I_3) = I_3$, et donc A est bien inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2, puis donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I_3.$$

3. Donner une expression explicite de (u_n) et (v_n), puis de N^n.

Exercice 3

Déterminer le rang de la matrice selon les valeurs de λ

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Réponse de l'exercice

On échelonne la matrice pour trouver son rang :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 4-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 7\lambda-24 & -\lambda^2-\lambda+16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 5\lambda & -\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 5\lambda(\lambda-12) & -\lambda(-\lambda^2+9\lambda+36) \end{pmatrix} \text{ si } \lambda \neq 12\,;\text{ sinon rang } 3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(-\lambda^2+4\lambda-4) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

- si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$, la matrice est de rang 2
- sinon, la matrice est de rang 3.

Exercice 4

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases indiquées :

1. $f(x,y) = (x+y, x+2y, x+3y)$, base de départ $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = ((1,0,1),(1,1,1),(1,1,0))$
2. $f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x+2y-3z)$, base de départ $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = \left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right)$.
3. $f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$, base de départ $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et base d'arrivée $\mathcal{C} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(-1,1,-1,0),(1,-1,0,-1)$.

Réponse de l'exercice

1. On a $f((1,1)) = (2,3,4)$. On cherche donc les coefficients de ce vecteur dans la base d'arrivée. Soient alors $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $(2,3,4) = x(1,0,1) + y(1,1,1) + z(1,1,0)$; on a alors le système

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ y+z = 3 \\ x+y = 4 \end{cases}$$

qui a pour solution $x = -1$, $y = 5$ et $z = -2$. Finalement,

$$(2,3,4) = -1(1,0,1) + 5(1,1,1) - 2(1,1,0).$$

On a de la même façon $f((1,2)) = (3,5,7) = -2(1,0,1) + 9(1,1,1) - 4(1,1,0)$.
Finalement, on a la matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve

$$\begin{aligned} f((0,1,1)) &= (0,-1) \\ &= -1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \\ f((1,0,1)) &= (3,0) \\ &= 3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \\ f((1,1,0)) &= (1,5) \\ &= 6\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où la matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. On trouve

$$\begin{aligned} f((1,0,0)) &= (-1,1,-1,0) \\ &= 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(-1,1,-1,0) + 0(1,-1,0,-1) \\ f((0,1,0)) &= (1,-1,0,-1) \\ &= 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(-1,1,-1,0) + 1(1,-1,0,-1) \\ f((0,0,1)) &= (0,0,1,1) \\ &= 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) - 1(-1,1,-1,0) - 1(1,-1,0,-1) \end{aligned}$$

D'où la matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA et AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.

3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$ associe la matrice $u(S) = ASA$.
   a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Réponse de l'exercice

1. On a
$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$
2. Il suffit de le vérifier.
3. a) On a déjà vu que $u(F)$, $u(G)$ et $u(H)$ étaient symétriques. De plus, u est clairement linéaire, et comme (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}^2$, on a donc la propriété demandée.
   b) On a déjà tout fait du coup.
   c) On a donc $AFA = 4H$, $AGA = 4G + 12H$ et $AHA = 4F + 6G + 9H$. On en déduit la matrice
$$\mathrm{mat}_{(F,G,H)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle *trace de A* la somme des termes de la diagonale principale :
$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.
2. Montrer que pour toutes matrices A et B, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. En déduire que deux matrices semblables ont même trace, puis qu'on peut définir la trace d'un endomorphisme.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = I_n$.
5. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soient D et D_1 les applications définies par
$$\forall f \in \mathcal{E},\ D(f) = f' \quad \text{et} \quad D_1(f) = \mathrm{id} \times f.$$
   a) Montrer que D et D_1 sont des endomorphismes.
   b) Calculer $D \circ D_1 - D_1 \circ D$.
   c) Que peut-on en conclure sur $\mathcal{E}$?

Réponse de l'exercice

1. Il suffit de le vérifier : pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien $\mathrm{Tr}(M + \lambda N) = \mathrm{Tr}(M) + \lambda \,\mathrm{Tr}(N)$.
2. Soit $\in [\![1, n]\!]$. Les coefficients diagonaux de coordonnées (i, i) de AB et BA sont donnés par
$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{et} \quad (BA)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}.$$
En sommant pour i allant de 1 à n, on trouve bien l'égalité voulue.
3. S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PNP^{-1}$, alors
$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(PNP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PN) = \mathrm{Tr}(N).$$
Ainsi, on peut définir na trace d'un endomorphisme comme la trace de n'importe quelle matrice le représentant.
4. Si de telles matrices existaient, on aurait alors $\mathrm{Tr}(I_n) = 0$, ce qui est impossible.
5. a) On vérifie facilement la linéarité, et par stabilité de $\mathcal{E}$ par produit et dérivation, ce sont bien des endomorphismes.
   b) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors
   $$D(D_1(f)) = D(id \times f) = f + \mathrm{id} \times f' \quad \text{et} \quad D_1(D(f)) = \mathrm{id} \times f'.$$
   Ainsi, $D \circ D_1 - D_1 \circ D = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.
   c) Ainsi, $\mathcal{E}$ n'est pas un espace de dimension finie.

Exercice 7

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{array}.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Déterminer le degré de $\varphi(P)$.
3. Déterminer le noyau de φ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note φ_n la restriction de φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
   a) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Déterminer la matrice de φ_n dans la base canonique.

Réponse de l'exercice

1. On vérifie facilement que φ est une application linéaire, puis qu'on reste dans $\mathbb{R}[X]$ par stabilité par somme, produit et dérivation.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$.

   Alors $(X^2-1)P''$ est de degré d, avec coefficient dominant $d(d-1)a_d$, XP' est de degré d avec coefficient dominant da_d, et $-4P$ de degré d avec coefficient dominant $-4a_d$.

   Ainsi, le degré de $\varphi(P)$ est inférieur ou égal à d, et le coefficient de X^d est
$$d(d-1)a_d + da_d - 4a_d = (d^2-4)a_d.$$
   Ainsi, si $d \neq 2$, on a $\deg(\varphi(P)) = \deg(P)$.

   Si $d = 2$, alors $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, et alors
$$\varphi(P) = -3a_1X - 2a_2 - 4a_0.$$
   Ainsi,
$$\deg(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 \neq -2a_0 \\ -\infty & \text{si } a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = -2a_0 \end{cases}.$$
3. D'après la question précédente, la seule solution pour avoir $\varphi(P) = 0$ est d'avoir $P = 0$ ou P de la forme $2aX^2 - a$. Ainsi, $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(2X^2-1)$.
4. a) On a vu en question 2 que $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P)$, et donc φ_n est bien un endomorphisme.

   b) On a pour tout k
$$\varphi(X^k) = (k^2-4)X^k - k(k-1)X^{k-2},$$
   avec la convention $X^\ell = 0$ si $\ell < 0$.

   On en déduit la matrice
$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -k(k-1) & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & k^2-4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & \cdots & & 0 & n^2-4 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$, et en déduire que $\mathrm{rg}(f) \neq 3$.
2. Montrer que le rang de f ne peut être égal qu'à 1 ou 2.
3. Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si $\mathrm{rg}(f) = 2$, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse de l'exercice

1. Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f(y) = f(f(x)) = 0$, et donc $y \in \ker(f)$.
   Si on avait $\mathrm{rg}(f) = 3$, alors par théorème du rang, on aurait $\dim(\ker(f)) = 1$, ce qui est impossible vu l'inclusion.
2. L'endomorphisme est supposé non nul, donc $\mathrm{rg}(f) \neq 0$. De plus, f ne peut pas être inversible, donc $\mathrm{rg}(f) \neq 4$. Par la question précédente, les deux seules possibilités sont 1 et 2.
3. On a $\mathrm{rg}(f) = 1$, et donc il existe $e_2 \in \mathrm{Im}(f)$ non nul, puis e_1 tel que $f(e_1) = e_2$.
   On a alors $e_2 \in \ker(f)$, qui en forme une famille libre ; on peut alors la compléter en une base de $\ker(f)$, (e_2, e_2, e_4).
   Il suffit alors de vérifier que (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre : soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des réels tels que $\sum \lambda_i e_i = 0$.
   En appliquant f, on a alors $\lambda_1 e_2 = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$.
   La famille (e_2, e_3, e_4) étant une base, on a bien tous les λ_i nuls.
   La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est alors celle demandée.
4. De même, on peut considérer une base (e_2, e_4) de $\mathrm{Im}(f)$, et des vecteurs e_1 et e_3 tels que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_3) = e_4$.
   On montre comme précédemment qu'on a bien une base de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle f a bien la forme demandée.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. Écrire en Python une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$, le vecteur u étant de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.
2. a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
   b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\ker(f_a)$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
   a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.

c) La matrice A est-elle inversible ?

5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.
   b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

Réponse de l'exercice

1. On propose le code

```python
def f_a(x,y,z,a):
    return [a*(x+z),x+z,-a*(x+z)]

```

2. a) On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3)$.
   b) On note que $f(e_2) = f(e_1 - e_3) = 0$, donc les vecteurs proposés sont bien dans $\ker(f_a)$.
   On sait, par théorème du rang, que $\ker(f_a)$ est de dimension 2 ; montrons alors que la famille est libre : si $\lambda e_2 + \mu(e_1 - e_3) = 0$, alors comme $\mathcal{B}$ est libre, on a $\lambda = \mu = 0$.
   La famille $(e_2, e_1 - e_3)$ est donc bien une base de $\ker(f_a)$.
3. On a
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix},$$
   puis $A^2 = 0$.
   Ainsi, $f_a \circ f_a$ est l'endomorphisme nul.
4. a) Soient alors λ, μ et ν trois réels tels que $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \nu e'_3 = 0$. On a alors
$$(\lambda a e_1 + \mu)e_1 + \lambda e_2 + (\nu - a\lambda)e_3 = 0,$$
   et on en déduit facilement que $\lambda = \mu = \nu = 0$.
   La famille est donc libre, et donc une base de E puisqu'elle contient trois vecteurs.
   b) Dans cette base, on trouve
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Le noyau de f_a est de dimension 2, et donc f_a n'est pas inversible, et donc A non plus.
5. a) La matrice dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $f_a - x\mathrm{id}$ est inversible, donc cet endomorphisme est inversible, et donc $B(x)$ aussi.
   b) En développant, on a donc
$$(A - xI_3)(A + xI_3) = A^2 - x^2 I_3 = -x^2 I_3.$$
   On a donc $B(x)^{-1} = \frac{-1}{x^2}(A + xI_3)$.

c) Les matrices A et I_3 commutent, et on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} B(x)^n &= (A - xI_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-1)^{n-k} x^{n-k} \\ &= (-1)^n x^n + n(-1)^{n-1} x^{n-1} A \end{aligned}$$

Exercice 10

Soit $\Delta\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant, calculer $\deg(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de Δ.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$
4. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$

Réponse de l'exercice

1. L'application Δ est clairement linéaire, et prend bien ses valeurs dans $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, c'est bien un endomorphisme.

   De plus, on note que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$. Par linéarité, pour tout polynôme P non constant, on a donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
2. D'après la question précédente, si P est non constant, alors $\Delta(P) \neq 0$. Si P est un polynôme constant, alors $\Delta(P) = 0$. On a donc
$$\ker(\Delta) = \mathbb{C}_0[X].$$
   Soit alors $P \in \mathbb{C}[X]$, et $d = \deg(P)$. Alors la restriction de Δ à $\mathbb{C}_{d+1}[X]$ a un noyau de dimension 1, et donc par théorème du rang, une image de dimension d. Ainsi, comme cette image est incluse dans $\mathbb{C}_d[X]$, cette restriction est surjective, et donc P admet un antécédent.

   Ainsi, Δ est surjective, et donc $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{C}[X]$.
3. Par récurrence sur n :
   - pour $n = 0$, le résultat est évident.

- supposons l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(P) &= \Delta(\Delta^n(P)) \\
&= \Delta\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(P(X+k+1) - P(X+k)\right) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k-1} P(X+k) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)\right) \\
&= (-1)^n \left((-1)^n P(X+n+1) - P(X) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} P(X+k)\right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} P(X+k)
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, on a bien le résultat demandé.

On note qu'en posant $\Delta = T - \mathrm{id}$, il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton.

4. Si $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a donc $\Delta^n(P) = 0$, et en évaluant la relation précédente en 0, on a bien le résultat.