11 Variables aléatoires absolument continues

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Nota : Dans le cadre de ce chapitre, on utilisera la tribu des *boréliens*, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On peut montrer qu'elle contient en particulier tous les intervalles, ce qui nous permettra de calculer les intégrales.

11.1 Variables à densité

Définition 11.1

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une *variable aléatoire à densité* s'il existe

La fonction f s'appelle alors une *densité de X*.

Nota : On note alors que dans ce cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ doit converger et être égale à 1.

Proposition-Définition 11.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

-
-
-

On dit alors que f est une *fonction de densité*.

Si f est une telle fonction, il existe une variable aléatoire réelle X admettant f comme densité.

Proposition 11.3

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors X est une variable aléatoire à densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est

-
-

Une densité de X est alors donnée par

NOTA : On note qu'une variable aléatoire discrète a une fonction de répartition discontinue. Les variables aléatoires discrètes ne sont donc pas à densité.

NOTA : Une variable aléatoire à densité peut donc admettre plusieurs densité. La différence n'étant que sur un nombre fini de points, on s'autorisera à parler de *la* densité d'une variable.

Définition 11.4

On dit que deux variables aléatoires à densité X et Y ont même loi si une des conditions équivalentes est vérifiée

- X et Y
- X et Y

La densité nous apprend plusieurs choses sur les probabilités :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. On dit qu'une variable à densité *ne charge pas les points*. En particulier :
  -
  -
- Pour tout point x pour lequel $f_X(x) = F'_X(x) \neq 0$, on a
$$\mathbb{P}(x < X < x + h) \underset{h \to 0}{\sim}$$
  Autrement dit, la probabilité que X soit proche de x est proportionnelle à $f_X(x)$.

On peut alors calculer des probabilités :

Proposition 11.5

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \mathbb{P}(a < X < b) =$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) =$$

11.1.1 Fonction d'une variable à densité.

On sait que si g est une fonction continue et X une variable aléatoire réelle, alors $g(X)$ reste une variable aléatoire réelle.

En revanche, si X est une fonction à densité, $g(X)$ ne l'est pas forcément.

> **EXERCICE :** Imaginer un exemple de fonction g telle que quelque soit la variable à densité X, $g(X)$ ne soit pas à densité.

La méthode générale pour le vérifier consiste à chercher la fonction de répartition de $g(X)$ en fonction de F_X, et vérifier qu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 11.6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors si X est une variable aléatoire à densité, $g(X) = aX + b$ aussi, et la densité de $g(X)$ est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{g(X)}(x) = \qquad\qquad .$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc, si $a > 0$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$F_{g(X)}$ est donc bien une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points, car F_X l'est.

On a de plus $f_{g(X)}(x) =$ $=$.

Si $a < 0$, on fait un raisonnement analogue.

□

EXERCICE : Étudier X^2 quand X est une variable aléatoire à densité.

On a en fait le théorème suivant, hors-programme :

Théorème 11.7

Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi' > 0$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ est bijective, et $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \varphi(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}(\varphi(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = F_X(\varphi^{-1}(x))$, donc $\varphi(X)$ est à densité, et la formule de dérivation d'une composée nous donne le résultat. □

NOTA : Le résultat reste vrai si $\varphi' < 0$. Dans ce cas, il faut rajouter une signe $-$ à la densité.

11.2 Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 11.8

Soit X une variable aléatoire de densité f, et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $t^r f(t)$ converge absolument. On note alors

$$m_r(X) =$$

On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1 ; dans ce cas, on note

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \, \mathrm{d}t.$$

EXEMPLE : Soit X de densité

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors X admet un moment de tout ordre, et

$$m_r(X) = \qquad = \qquad =$$

NOTA : On remarque que, comme $t^r f(t)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, on peut se contenter de montrer la convergence, qui implique la convergence absolue.

On a alors, comme pour les variables discrètes :

Théorème 11.9 – de transfert

Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans l'intervalle I d'extrémités $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire, qui admet une espérance si et seulement si

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) =$$

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a = -\infty$, $b = \infty$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi' > 0$.

On a déjà vu que $\varphi(X)$ est une variable à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)}(x) =$$

Donc $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

converge absolument, *i.e.* si

converge.

En faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on se ramène à la convergence de

et on retrouve le résultat cherché. $\square$

Corollaire 11.10

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si une variable à densité X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi, et

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Corollaire 11.11

X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

11.2.1 Espérance

Proposition 11.12 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Si X et Y admettent une espérance, alors $aX + bY$ aussi, et

Proposition 11.13

Soient X et Y deux variables à densité. Si $|X| \leqslant Y$ presque sûrement et que Y admet une espérance, alors X admet une espérance et

Proposition 11.14 – Positivité et croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables à densité qui admettent une espérance.

- Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors
- Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors

Proposition 11.15

Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance. Alors si X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) =$$

Proposition 11.16

Soient X une variable à densité, et $q \leqslant r \in \mathbb{N}^*$. Alors si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Démonstration. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, , donc

Comme $1 + |X|^r$ admet une espérance, $|X|^q$ aussi. □

En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.

11.2.2 Variance

Définition 11.17

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance. On suppose que $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet aussi une espérance.

On appelle alors *variance* de X le réel

$$\mathbb{V}(X) = \qquad =$$

Définition 11.18

Si X admet une variance, alors on appelle *écart-type* de X le réel $\sigma(X) =$.

On a alors toujours la formule de Kœnig-Huygens :

Proposition 11.19 – Formule de Kœnig-Huygens

Une variable aléatoire à densité X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) =$$

Proposition 11.20

Soient X une variable aléatoire à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}(aX + b) =$$

Proposition 11.21

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une variance. Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(X+Y) =$$

11.2.3 Variables centrées, réduites

Définition 11.22

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que

- X est *centrée* si
- X est *centrée réduite* si

On peut alors toujours construire des variables centrées ou centrées réduites :

Proposition 11.23

Soit X une variable aléatoire.

- Si X admet une espérance, alors
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors

X^* s'appelle la *variable centrée réduite associée à* X.

11.3 Lois à densité usuelles

Il faut connaître quelques lois usuelles.

11.3.1 Lois uniformes continues

Comme pour les variables discrètes, on peut définir des lois uniformes à densité, ou lois uniformes continues.

Définition 11.24

On dit que X suit une *loi uniforme sur l'intervalle* $[a, b]$ si X admet pour densité la fonction

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

NOTA : On remarquera que les lois $\mathcal{U}([a, b]), \mathcal{U}(]a, b[), \mathcal{U}([a, b[)$ et $\mathcal{U}(]a, b])$ sont en fait identiques, puisque les densités ne diffèrent qu'en un ou deux points.

Proposition 11.25

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) =$$

On peut en fait toujours se ramener à une loi uniforme sur l'intevalle $[0, 1]$:

Proposition 11.26

Soit X une variable aléatoire à densité, et soient $a < b$ deux réels. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]) \Leftrightarrow$$

Proposition 11.27 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. Alors X admet une espérance et une variance*, et

$$\mathbb{E}(X) = \qquad \text{et } \mathbb{V}(X) =$$

11.3.2 Lois exponentielles

Définition 11.28

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet pour densité la

*. et des moments de tout ordre

fonction

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 11.29

La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

Proposition 11.30 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance[†], et

$$\mathbb{E}(X) = \qquad \text{et } \mathbb{V}(X) =$$

On peut toujours se ramener à une loi exponentielle de paramètre 1 :

Proposition 11.31

Soit $\lambda > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que $P(X \geqslant x) > 0$ pour tout x, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \mathbb{P}_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x + y) = \mathbb{P}(X \geqslant y).$$

Autrement dit, une loi sans mémoire "oublie" ce qui s'est passé avant.

Plus précisément

Théorème 11.32

Soit X une variable à densité positive telle que pour tout $x \geqslant 0$, $P(X \geqslant x) > 0$. Alors X est une loi sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

†. et des moments de tout ordre

11.3.3 Lois normales

Définition 11.33

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 si elle admet pour densité la fonction

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

NOTA : On utilisera beaucoup la *loi normale centrée réduite*, *i.e.* la loi normale de paramètres 0 et 1. Sa densité est donc

Proposition 11.34

La fonction de répartition d'une loi normale de paramètres μ et σ^2 est donnée par

NOTA : On ne peut pas donner une fonction de répartition plus simple. En effet, le théorème de Liouville-Rosenlicht prouve qu'on ne peut pas calculer de primitive de $e^{-x^2/2}$ avec des fonctions élémentaires.

Définition 11.35

On note Φ la fonction de réparition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi(x) =$$

EXERCICE : À l'aide d'un changement de variables affine, retrouver la fonction de répartition d'une loi normale quelconque en fonction de Φ.

Proposition 11.36

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(-x) =$. En particulier $\Phi(0) =$.

Démonstration. Par parité de la fonction $e^{-t^2/2}$ ‡, on note que

$\Phi(-x) =$

$=$

$=$

□

Comme précédemment, on peut toujours se ramener à une loi simple :

Proposition 11.37

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors

$$aX + b \hookrightarrow$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{\sigma}(X - \mu) \hookrightarrow$$

Les valeurs de Φ se lisent dans une *table*. Par exemple, pour obtenir $\Phi(1,14)$, on regardera à l'intersection de la ligne $1,1$ et $0,04$ pour obtenir $\Phi(1,14) = 0,8729$.

Pour les valeurs négatives de x, on utilise la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Enfin, pour des variables normales non centrées réduites, on utilise la proposition précédente pour s'y ramener ; par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$, on aura

$\mathbb{P}(X \leqslant 2) =$

‡. ou changement de variable $u = -t$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Proposition 11.38

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors Z est centrée réduite, *i.e.*

$$\mathbb{E}(Z) = \qquad \text{et } \mathbb{V}(Z) = \qquad .$$

On en déduit que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \qquad \text{et } \mathbb{V}(X) =$$

Démonstration. La fonction $te^{-t^2/2}$ est une fonction , continue sur $\mathbb{R}$, et $te^{-t^2/2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$. Donc Z admet une espérance, qui est nulle.

Pour la même raison, Z admet un moment d'ordre 2. Calculons l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Soit donc $A > 0$.

$$\int_0^A t^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\xrightarrow{A\to\infty}$$

Par parité, on en déduit donc que $\mathbb{E}(Z^2) =$. On en déduit la variance par la formule de Huygens. □

11.4 Somme de variables aléatoires à densité

Dans cette partie, on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à densité. On note f (resp. g) une densité de X (resp. Y).

Théorème 11.39

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée.

Alors la fonction $f * g$ définie par

$$f * g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$f * g$ s'appelle le *produit de convolution* de f et g.

NOTA : On note que par le changement de variable $u = x - t$, on prouve que

Théorème 11.40

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée. Alors

EXERCICE : Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Alors les lois normales sont stables :

Théorème 11.41 – Stabilité des lois normales

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, s^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres

11.5 Maximum et minimum de variables à densité

Proposition 11.42

Soient X et Y deux variables à densité indépendantes. On note f_X (resp. f_Y) et F_X (resp. F_Y) les densité et fonction de répartition de X (resp. Y).

Alors $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$ sont des variables à densité, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant f_M (resp. f_m) et F_M (resp. F_m) les densité et fonction de répartition de M (resp. m)

$$\begin{aligned}
F_M(x) &= F_X(x)F_Y(x) \\
f_M(x) &= f(x)F_Y(x) + F_X(x)f_Y(x) \\
F_m(x) &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) \\
f_m(x) &= f(x)(1 - F_Y(x)) + g(x)(1 - F_X(x))
\end{aligned}$$

11.6 Exercices

Exercice 1

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de densité :

   a) $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

   b) $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

   c) $h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t}\ln\left(1 + e^t\right)\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

2. Déterminer si les fonctions de répartition suivantes sont les fonctions de répartitions de variables à densité ; si oui, en donner une densité :

   a) $F : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \frac{1}{1+e^x} \end{array}$

   b) $G : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{c}{1+x^2} \end{array}$.

1. Déterminer le réel c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Une variable aléatoire admettant f pour densité admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Soit X admettant f pour densité. Montrer que $\frac{1}{X}$ est une variable à densité, et qu'elle est de même loi que X.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda}{1+t^2} \end{array}$$

1. Trouver la valeur de λ pour que f soit une densité.

   La loi qui correspond à cette densité s'appelle loi de Cauchy.

2. Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.

3. Soit X suivant une loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ et $\mathbb{P}(X > 1)$. En déduire $\mathbb{P}(X < -1)$.

4. Étudier l'espérance et la variance de X.

5. Donner la loi de la variable $\arctan(X)$.

Exercice 5

Soit X une variable à densité, de densité f. On suppose que X est positive, *i.e.* que f est nulle sur $\mathbb{R}^-$. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall a > 0, \int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

$$0 \leqslant a\mathbb{P}(X > a) \leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire que X admet une espérance, et la calculer.

3. On suppose maintenant que X admet une espérance.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

$$a\mathbb{P}(X > a) \leqslant \mathbb{E}(X).$$

   b) En déduire que $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge, et la calculer.

Exercice 6

1. Démontrer que les lois exponentielles sont sans mémoire.

2. Soit X une variable aléatoire positive à densité f continue, sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle.

Exercice 7

Dans cet exercice, on utilisera la table de la loi normale.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(-t < x < t) \approx 0,95$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées de
   a) $\mathbb{P}(X < 7,5)$
   b) $\mathbb{P}(X > 8,5)$
   c) $\mathbb{P}(6,5 < X < 10)$
   d) $\mathbb{P}_{[X>5]}(X > 6)$.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si $X + \frac{1}{X}$ admet une espérance, alors X aussi.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9

Rappel : algorithme de dichotomie.

On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un point que l'on note α.

On définit les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

- *$a_0 = a$ et $b_0 = b$*
- *pour tout entier k, on note $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, et*
  - *si $g(a_k)g(c_k) \leqslant 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$*
  - *sinon, alors $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.*

Les suites (a_k) et (b_k) convergent alors toutes les deux vers α.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, justifier que $\frac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.

4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Montrer que Φ est une densité de probabilité.

5. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
6. Montrer que $\forall t > \alpha,\ f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Exercice 10

On considère une variable X qui suit la loi normale centrée réduite. On admet que X admet des moments à tout ordre.

1. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une estimation du moment d'ordre n de X pour tout entier n non nul.

   On pourra utiliser la fonction `gauss(m,s)` *du module* `random` *pour simuler une loi normale* $\mathcal{N}(m,s)$.

   Donner en particulier des estimations de $\mathbb{E}(X^n)$ pour $n \in [\![1,6]\!]$.
3. Calculer simplement la valeur de $\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right)$ pour tout entier n.

Pour tout entier n, on pose $U_n = \ln\left(\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)\right)$.

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \ln(2n+1)$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(2i-1)$, puis que $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
6. Établir à l'aide de Python une conjecture sur la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n\ln(n)}$.
7. Montrer que pour tout $i \geqslant 2$,

$$\int_{2i-3}^{2i-1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln(2i-1) \leqslant \int_{2i-1}^{2i+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)(\ln(2n-1) - 1) \leqslant U_n \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(2n+1) - 1).$$

9. Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, $\ln(ax+b) + c \underset{x\to\infty}{\sim} \ln(x)$.
10. En déduire que $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n)$.