11 Variables aléatoires absolument continues

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Nota : Dans le cadre de ce chapitre, on utilisera la tribu des *boréliens*, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On peut montrer qu'elle contient en particulier tous les intervalles, ce qui nous permettra de calculer les intégrales.

11.1 Variables à densité

Définition 11.1

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une *variable aléatoire à densité* s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f s'appelle alors une *densité de* X.

Nota : On note alors que dans ce cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ doit converger et être égale à 1.

Proposition-Définition 11.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- f est positive
- f est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de point
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à 1

On dit alors que f est une *fonction de densité*.

Si f est une telle fonction, il existe une variable aléatoire réelle X admettant f comme densité.

Proposition 11.3

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors X est une variable aléatoire à densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est

- continue sur $\mathbb{R}$
- de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points

Une densité de X est alors donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} F_X'(x) & \text{si } F_X \text{ dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

NOTA : On note qu'une variable aléatoire discrète a une fonction de répartition discontinue. Les variables aléatoires discrètes ne sont donc pas à densité.

NOTA : Une variable aléatoire à densité peut donc admettre plusieurs densité. La différence n'étant que sur un nombre fini de points, on s'autorisera à parler de *la* densité d'une variable.

Définition 11.4

On dit que deux variables aléatoires à densité X et Y ont même loi si une des conditions équivalentes est vérifiée

- X et Y ont la même fonction de répartition
- X et Y ont la même densité, sauf éventuellement en un nombre fini de point

La densité nous apprend plusieurs choses sur les probabilités :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. On dit qu'une variable à densité *ne charge pas les points*. En particulier :
  - $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}(X > x)$
  - $\mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant y) = \mathbb{P}(x < X \leqslant Y) = \mathbb{P}(x \leqslant X < y) = \mathbb{P}(x < X < y)$
- Pour tout point x pour lequel $f_X(x) = F_X'(x) \neq 0$, on a

  $$\mathbb{P}(x < X < x + h) \underset{h \to 0}{\sim} h f_x(x).$$

  Autrement dit, la probabilité que X soit proche de x est proportionnelle à $f_X(x)$.

On peut alors calculer des probabilités :

Proposition 11.5

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11.1.1 Fonction d'une variable à densité.

On sait que si g est une fonction continue et X une variable aléatoire réelle, alors $g(X)$ reste une variable aléatoire réelle.

En revanche, si X est une fonction à densité, $g(X)$ ne l'est pas forcément.

EXERCICE : Imaginer un exemple de fonction g telle que quelque soit la variable à densité X, $g(X)$ ne soit pas à densité.

La méthode générale pour le vérifier consiste à chercher la fonction de répartition de $g(X)$ en fonction de F_X, et vérifier qu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 11.6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors si X est une variable aléatoire à densité, $g(X) = aX + b$ aussi, et la densité de $g(X)$ est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{g(X)}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc, si $a > 0$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(x) &= \mathbb{P}(g(X) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(aX + b \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{x-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

$F_{g(X)}$ est donc bien une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points, car F_X l'est.

On a de plus $f_{g(X)}(x) = F'_{g(X)}(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Si $a < 0$, on fait un raisonnement analogue.

□

EXERCICE : Étudier X^2 quand X est une variable aléatoire à densité.

On a en fait le théorème suivant, hors-programme :

Théorème 11.7

Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi' > 0$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ est bijective, et $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \varphi(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}(\varphi(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = F_X(\varphi^{-1}(x))$, donc $\varphi(X)$ est à densité, et la formule de dérivation d'une composée nous donne le résultat. □

NOTA : Le résultat reste vrai si $\varphi' < 0$. Dans ce cas, il faut rajouter une signe $-$ à la densité.

11.2 Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 11.8

Soit X une variable aléatoire de densité f, et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $t^r f(t)$ converge absolument. On note alors

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1 ; dans ce cas, on note

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXEMPLE : Soit X de densité

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors X admet un moment de tout ordre, et

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^r\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r+1}$$

NOTA : On remarque que, comme $t^r f(t)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, on peut se contenter de montrer la convergence, qui implique la convergence absolue.

On a alors, comme pour les variables discrètes :

Théorème 11.9 – de transfert

Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans l'intervalle I d'extrémités $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire, qui admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

converge *absolument*. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a = -\infty$, $b = \infty$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi' > 0$.

On a déjà vu que $\varphi(X)$ est une variable à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)}(x) = (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)).$$

Donc $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

converge absolument, *i.e.* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|(\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

converge.

En faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on se ramène à la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on retrouve le résultat cherché. □

Corollaire 11.10

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si une variable à densité X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi, et

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Corollaire 11.11

X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

11.2.1 Espérance

Proposition 11.12 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Si X et Y admettent une espérance, alors $aX + bY$ aussi, et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b(Y).$$

Proposition 11.13

Soient X et Y deux variables à densité. Si $|X| \leqslant Y$ presque sûrement et que Y admet une espérance, alors X admet une espérance et

$$|\mathbb{E}(X)| < \mathbb{E}(Y).$$

Proposition 11.14 – Positivité et croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables à densité qui admettent une espérance.

- Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 11.15

Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance. Alors si X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 11.16

Soient X une variable à densité, et $q \leqslant r \in \mathbb{N}^*$. Alors si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Démonstration. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^q \leqslant 1 + |x|^r$, donc

$$|X|^q \leqslant 1 + |X|^r.$$

Comme $1 + |X|^r$ admet une espérance, $|X|^q$ aussi. □

En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.

11.2.2 Variance

Définition 11.17

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance. On suppose que $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet aussi une espérance.

On appelle alors *variance* de X le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 11.18

Si X admet une variance, alors on appelle *écart-type* de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

On a alors toujours la formule de Kœnig-Huygens :

Proposition 11.19 – Formule de Kœnig-Huygens

Une variable aléatoire à densité X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 11.20

Soient X une variable aléatoire à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Proposition 11.21

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une variance. Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

11.2.3 Variables centrées, réduites

Définition 11.22

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que

- X est *centrée* si X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$.
- X est *centrée réduite* si X admet un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.

On peut alors toujours construire des variables centrées ou centrées réduites :

Proposition 11.23

Soit X une variable aléatoire.

- Si X admet une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

X^* s'appelle la *variable centrée réduite associée à* X.

11.3 Lois à densité usuelles

Il faut connaître quelques lois usuelles.

11.3.1 Lois uniformes continues

Comme pour les variables discrètes, on peut définir des lois uniformes à densité, ou lois uniformes continues.

Définition 11.24

On dit que X suit une *loi uniforme sur l'intervalle* $[a,b]$ si X admet pour densité la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

NOTA : On remarquera que les lois $\mathcal{U}([a,b]), \mathcal{U}(]a,b[), \mathcal{U}([a,b[)$ et $\mathcal{U}(]a,b])$ sont en fait identiques, puisque les densités ne diffèrent qu'en un ou deux points.

Proposition 11.25

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} .$$

On peut en fait toujours se ramener à une loi uniforme sur l'intevalle $[0,1]$:

Proposition 11.26

Soit X une variable aléatoire à densité, et soient $a < b$ deux réels. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \Leftrightarrow \frac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).$$

Proposition 11.27 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Alors X admet une espérance et une variance*, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

11.3.2 Lois exponentielles

Définition 11.28

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet pour densité la

*. et des moments de tout ordre

fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 11.29

La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Proposition 11.30 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance [†], et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On peut toujours se ramener à une loi exponentielle de paramètre 1 :

Proposition 11.31

Soit $\lambda > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que $P(X \geqslant x) > 0$ pour tout x, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \mathbb{P}_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x + y) = \mathbb{P}(X \geqslant y).$$

Autrement dit, une loi sans mémoire "oublie" ce qui s'est passé avant.

Plus précisément

Théorème 11.32

Soit X une variable à densité positive telle que pour tout $x \geqslant 0$, $P(X \geqslant x) > 0$. Alors X est une loi sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

†. et des moments de tout ordre

11.3.3 Lois normales

Définition 11.33

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 si elle admet pour densité la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{array}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

NOTA : On utilisera beaucoup la *loi normale centrée réduite*, *i.e.* la loi normale de paramètres 0 et 1. Sa densité est donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \end{array}$$

Proposition 11.34

La fonction de répartition d'une loi normale de paramètres μ et σ^2 est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t \end{array}$$

NOTA : On ne peut pas donner une fonction de répartition plus simple. En effet, le théorème de Liouville-Rosenlicht prouve qu'on ne peut pas calculer de primitive de $e^{-x^2/2}$ avec des fonctions élémentaires.

Définition 11.35

On note Φ la fonction de réparition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

EXERCICE : À l'aide d'un changement de variables affine, retrouver la fonction de répartition d'une loi normale quelconque en fonction de Φ.

Proposition 11.36

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. Par parité de la fonction $e^{-t^2/2}$ ‡, on note que

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 1-\Phi(x)\end{aligned}$$

□

Comme précédemment, on peut toujours se ramener à une loi simple :

Proposition 11.37

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Alors

$$aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2).$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{\sigma}(X-\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Les valeurs de Φ se lisent dans une *table*. Par exemple, pour obtenir $\Phi(1,14)$, on regardera à l'intersection de la ligne $1,1$ et $0,04$ pour obtenir $\Phi(1,14)=0,8729$.

Pour les valeurs négatives de x, on utilise la relation $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

Enfin, pour des variables normales non centrées réduites, on utilise la proposition précédente pour s'y ramener ; par exemple, si $X\hookrightarrow\mathcal{N}(1,2)$, on aura

$$\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\mathbb{P}(X-1\leqslant 2)=\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-1)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx\Phi(0,71)\approx 0,7611.$$

‡. ou changement de variable $u=-t$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Proposition 11.38

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors Z est centrée réduite, *i.e.*

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(Z) = 1.$$

On en déduit que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Démonstration. La fonction $te^{-t^2/2}$ est une fonction impaire, continue sur $\mathbb{R}$, et $te^{-t^2/2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$. Donc Z admet une espérance, qui est nulle.

Pour la même raison, Z admet un moment d'ordre 2. Calculons l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Soit donc $A > 0$.

$$\int_0^A t^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = [-2te^{-t^2/2}]_0^A + \int_0^A e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
$$\xrightarrow{A\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Par parité, on en déduit donc que $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$. On en déduit la variance par la formule de Huygens. □

11.4 Somme de variables aléatoires à densité

Dans cette partie, on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à densité. On note f (resp. g) une densité de X (resp. Y).

Théorème 11.39

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée.

Alors la fonction $f * g$ définie par

$$f*g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$f * g$ s'appelle le *produit de convolution* de f et g.

NOTA : On note que par le changement de variable $u = x - t$, on prouve que $f * g = g * f$.

Théorème 11.40

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, de densité $f * g$.

EXERCICE : Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Alors les lois normales sont stables :

Théorème 11.41 – Stabilité des lois normales

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, s^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres $\mu + m$ et $s^2 + \sigma^2$.

11.5 Maximum et minimum de variables à densité

Proposition 11.42

Soient X et Y deux variables à densité indépendantes. On note f_X (resp. f_Y) et F_X (resp. F_Y) les densité et fonction de répartition de X (resp. Y).

Alors $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$ sont des variables à densité, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant f_M (resp. f_m) et F_M (resp. F_m) les densité et fonction de répartition de M (resp. m)

$$\begin{aligned} F_M(x) &= F_X(x)F_Y(x) \\ f_M(x) &= f(x)F_Y(x) + F_X(x)f_Y(x) \\ F_m(x) &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) \\ f_m(x) &= f(x)(1 - F_Y(x)) + g(x)(1 - F_X(x)) \end{aligned}$$

11.6 Exercices

Exercice 1

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de densité :

a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

c) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t}\ln\left(1+e^{t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

2. Déterminer si les fonctions de répartition suivantes sont les fonctions de répartitions de variables à densité ; si oui, en donner une densité :

a) $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-\frac{1}{1+e^x} \end{array}$

b) $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-e^{-x^2/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

Réponse de l'exercice

1. a) Oui
   b) Oui
   c) Non
2. a) Oui
   b) Oui

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda}{1+t^2} \end{array}$$

1. Trouver la valeur de λ pour que f soit une densité.

   La loi qui correspond à cette densité s'appelle loi de Cauchy.

2. Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.

3. Soit X suivant une loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ et $\mathbb{P}(X > 1)$. En déduire $\mathbb{P}(X < -1)$.
4. Étudier l'espérance et la variance de X.
5. Donner la loi de la variable $\arctan(X)$.

Réponse de l'exercice

1. La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour qu'elle soit positive, il faut et il suffit que $\lambda > 0$. Enfin, on calcule
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \lambda\pi\end{aligned}$$
On doit donc prendre $\lambda = \frac{1}{\pi}$.
2. La fonction de répartition de la loi de Cauchy est donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$
3. On a
$$\mathbb{P}(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > 1) = \int_{1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$
On en déduit alors
$$\mathbb{P}(X < -1) = \frac{1}{4}.$$
4. On note que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge en $+\infty$, car $tf(t) \sim \frac{1}{\pi t}$, et donc pour t assez grand, $tf(t) \geqslant \frac{1}{2\pi t}$.
La loi de Cauchy n'admet donc pas d'espérance, et donc pas de variance.
5. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{P}(\arctan(X) \leqslant t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } t \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\left(t + \frac{1}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$
On reconnaît une loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3

Soit $a > 0$. On définit la fonction
$$f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, \infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(i) Montrer que f_a est une densité.

Une variable aléatoire ayant cette densité suit la loi de Pareto.

(ii) Soit X une variable aléatoire de densité f_a. Déterminer la fonction de répartition de X.

(iii) Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X, et les calculer le cas échéant.

(iv) Déterminer la fonction de répartition de $Y = \ln X$.

(v) Montrer que la loi de Pareto est à *queue longue*, *i.e.*

$$\forall y > 0,\ \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = 1.$$

Réponse de l'exercice

1. La fonction f_a est positive, continue sauf éventuellement en 1, et vérifie
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^{-a}\right]_1^{\infty} = 1.$$
C'est donc bien une fonction de densité.
2. La fonction de répartition de X est donnée par $F(t) = 0$ si $t \leqslant 1$, et pour tout $t > 1$
$$F(t) = \int_1^t f_a(u)\,\mathrm{d}u = 1 - t^{-a}.$$
3. On a pour tout $t > 1$
$$tf_a(t) = at^{-a} \quad \text{et} \quad t^2 f_a(t) = at^{-a+1}.$$
La variable X admet donc une espérance si et seulement si $a > 1$, et une variance si et seulement si $a > 2$. On a alors le cas échéant
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a}{a-2}\frac{1}{(a-1)^2}.$$
4. On a donc pour tout t positif
$$\mathbb{P}(\ln(X) \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant e^t) = 1 - e^{-at}.$$
Si $t < 0$, alors $\mathbb{P}(Y \leqslant t) = 0$.
On reconnaît alors une loi exponentielle.
5. Il suffit de calculer la probabilité en question
$$\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \left(\frac{x}{x+y}\right)^a \to 1.$$

Exercice 4

Soit X une variable à densité, de densité f. On suppose que X est positive, *i.e.* que f est nulle sur $\mathbb{R}^-$. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que
$$\forall a > 0,\ \int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

   $$0 \leqslant a\mathbb{P}(X > a) \leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire que X admet une espérance, et la calculer.

3. On suppose maintenant que X admet une espérance.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

   $$a\mathbb{P}(X > a) \leqslant \mathbb{E}(X).$$

   b) En déduire que $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge, et la calculer.

Réponse de l'exercice

1. Soient les fonctions $u\colon t \mapsto t$ et $v\colon t \mapsto \mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par intégration par parties,

   $$\begin{aligned}\int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^a u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\mathbb{P}(X > t)]_0^a + \int_0^a tF'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. a) L'inégalité de gauche est claire. On a de plus

   $$\begin{aligned}a\mathbb{P}(X > a) &= 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > a)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   par croissance de l'intégrale.

   b) On a pour $a > 0$

   $$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t) = \int_0^a \mathbb{P}(X > t) - \int_0^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}(X > t) \to 0$$

   quand $a \to \infty$, par hypothèse de convergence de l'intégrale.
   Donc par la question 1, l'intégrale $\int_0^\infty tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a alors

   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

3. a) C'est une conséquence directe de l'inégalité de Markov.

   b) On a donc

   $$\int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{E}(X) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\mathbb{E}(X).$$

   Ainsi, l'intégrale de gauche converge, et donc

   $$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(X).$$

Exercice 5

1. Démontrer que les lois exponentielles sont sans mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire positive à densité f continue, sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle.

Réponse de l'exercice

1. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X\geqslant x]}(X \geqslant x+y) &= \frac{\mathbb{P}(X \geqslant x+y)}{\mathbb{P}(X \geqslant x)} \\ &= \frac{1-F(x+y)}{1-F(x)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} \\ &= e^{-\lambda y} \\ &= \mathbb{P}(X \geqslant y)\end{aligned}$$
2. Soit $G = 1 - F \colon t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$. On a alors par hypothèse
$$G(x+y) = G(x)G(y).$$
Or la fonction f est continue, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à x, puis en prenant $x = 0$, on obtient alors
$$\forall y,\ G'(y) = G'(0)G(y).$$
La fonction G est donc de la forme $y \mapsto Ke^{-\lambda y}$. Comme X est positive, on a donc $K = 1$, et on retrouve alors bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, et soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Pour quel $a \in \mathbb{R}^+$ la quantité $P(a \leqslant X \leqslant na)$ est-elle maximale ?

Réponse de l'exercice

Soit pour tout $a \in \mathbb{R}_+$
$$f(a) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant na) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{na} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
Par théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $a \geqslant 0$,
$$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(ne^{-\frac{n^2a^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(ne^{-\frac{(n^2-1)a^2}{2}} - 1\right).$$
Ainsi, cette dérivée est positive si et seulement si
$$a \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}.$$
La fonction f admet donc un maximum en $a = \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}$.

Exercice 7

Dans cet exercice, on utilisera la table de la loi normale.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(-t < x < t) \approx 0,95$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées de
   a) $\mathbb{P}(X < 7,5)$
   b) $\mathbb{P}(X > 8,5)$
   c) $\mathbb{P}(6,5 < X < 10)$
   d) $\mathbb{P}_{[X>5]}(X > 6)$.

Réponse de l'exercice

1. On trouve $t = 1,96$.
2. On trouve, dans l'ordre, $0,4$, $0,4$, $0,6$, $0,9015$.

Exercice 8

Soient $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0,1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.
   c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geqslant 2$.

2. On note F_n la fonction de répartition de Y_n.
   Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
   En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.
3. a) Montrer que pour tout réel u de $[0,1]$, on a :
   $$(1-u)^n \geqslant 1 - nu.$$

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty}(1-F_n(x))\,\mathrm{d}x$ est convergente, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-F_n(x))=0$.

4. a) Pour tout $A>0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A xf_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^A(1-F_n(x))\,\mathrm{d}x-A(1-F_n(A)).$$

b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$E(Y_n)=\int_0^{+\infty}(1-F_n(x))\,\mathrm{d}x.$$

5. À l'aide du changement de variable $t=1-e^{-x}$, montrer que :

$$E(Y_n)=\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t,$$

et en déduire finalement que :

$$E(Y_n)=S_n.$$

Réponse de l'exercice

1. a) Calculons la fonction de répartition de $Z=-\ln(U)$. Soit donc $t\in\mathbb{R}$. Si $t<0$, il est clair que $P(Z\leqslant t)=0$. Sinon, on a

$$\begin{aligned}P(Z\leqslant t)&=P(-\ln(U)\leqslant t)\\&=P(U\geqslant e^{-t})\\&=1-P(U<e^{-t})\\&=1-e^{-t}\end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonctiond de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc $-\ln(U)$ suit bien cette loi.

b)
```
import math as m
import random as rd

def y(n):
    liste = [-m.log(rd.random()) for k in range(n)]
    return max(liste)
```

c)
```
def s(n):
    f = 0
    for k in range(1,n+1):
        f += 1/k
    return f

def conj(n):
    N = 10000
    moyenne = 0
    for _ in range(N):
```

```
            moyenne += y(n)/N
        return moyenne/s(n)

print([conj(k) for k in range(1,100)])
```

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note que le maximum des X_i est inférieur à t si et seulement si tous les X_i sont inférieurs à t. On a donc, pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(Y_n \leqslant x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) \text{ par indépendance} \\ &= (1-e^{-x})^n \end{aligned}$$

Les X_i ne prenant que des valeurs positives, il est clair que $F_n(x) = 0$ si x est strictement négatif.
La fonction F_n est bien $\mathcal{C}^1$, sauf éventuellement en 0, et est bien continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^{-x})^n = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} 0$).
En dérivant cette fonction, on obtient donc une densité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\varphi(n)$: "$\forall u \in [0,1],\ (1-u)^n \geqslant 1-nu$".
   - $\varphi(1)$ est triviale.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\varphi(n)$, et montrons $\varphi(n+1)$. On a alors

$$\begin{aligned} (1-u)^{n+1} &= (1-u)(1-u)^n \\ &\geqslant (1-u)(1-nu) \text{ par } \varphi(n) \\ &= 1-(n+1)u-nu^2 \\ &\geqslant 1-(n+1)u \end{aligned}$$

   On a bien $\varphi(n+1)$.

   Par récurrence, on a donc bien $\forall u \in [0,1],\ (1-u)^n \geqslant 1-nu$.

   b) La fonction $1-F_n$ est continue en 0, et on étudie donc l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Soit $x \geqslant 0$. Alors $e^{-x} \in [0,1]$, et donc

$$1-F_n(x) \leqslant 1-(1-ne^{-x}) = ne^{-x}.$$

   Les fonctions $1-F_n$ et $x \mapsto ne^{-x}$ étant positives, et cette dernière étant intégrable, $\int_0^\infty (1-F_n(x))\,\mathrm{d}x$ converge.
   De plus, on a de la même façon pour tout $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant x(1-F_n(x)) \leqslant nxe^{-x} \to 0,$$

   et par encadrement des limites, $\lim\limits_{x\to\infty} x(1-F_n(x)) = 0$.

4. a) Soit $A > 0$. Soient u et v les fonctions définies sur $]0, A]$ par $u(x) = x$ et $v(x) = 1 - F_n(x)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}_1$ sur $]0, A]$, et donc par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^A x f_n(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^A u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[u(x)v(x)\right]_0^A + \int_0^A u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -A(1 - F_n(A)) + \int_0^A (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   b) On a vu en 3b que le membre de droite de l'égalité précédente convergeait quand $A \to \infty$, vers $\int_0^\infty (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x$. L'intégrale $\int_0^\infty x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et donc Y_n admet bien une espérance, qui est celle demandée.

5. La fonction $\varphi : t \in]0, 1[\mapsto -\ln(1 - t)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$, et donc par changement de variables :

$$E(Y_n) = \int_0^1 (1 - F_n(-\ln(1 - t)))\frac{\mathrm{d}t}{1 - t} = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\,\mathrm{d}t.$$

   On reconnait alors une somme géométrique :

$$\forall t \neq 1,\ \frac{1 - t^n}{1 - t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k,$$

   et donc par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}E(Y_n) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$