11 Variables aléatoires absolument continues

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

> **Nota :** Dans le cadre de ce chapitre, on utilisera la tribu des *boréliens*, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.
>
> On peut montrer qu'elle contient en particulier tous les intervalles, ce qui nous permettra de calculer les intégrales.

11.1 Variables à densité

Définition 11.1

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une *variable aléatoire à densité* s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de point, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f s'appelle alors une *densité de* X.

> **Nota :** On note alors que dans ce cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ doit converger et être égale à 1.

Proposition-Définition 11.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- f est positive
- f est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de point
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à 1

On dit alors que f est une *fonction de densité*.

Si f est une telle fonction, il existe une variable aléatoire réelle X admettant f comme densité.

Proposition 11.3

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors X est une variable aléatoire à densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est

- continue sur $\mathbb{R}$
- de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points

Une densité de X est alors donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } F_X \text{ dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

NOTA : On note qu'une variable aléatoire discrète a une fonction de répartition discontinue. Les variables aléatoires discrètes ne sont donc pas à densité.

NOTA : Une variable aléatoire à densité peut donc admettre plusieurs densité. La différence n'étant que sur un nombre fini de points, on s'autorisera à parler de *la* densité d'une variable.

Définition 11.4

On dit que deux variables aléatoires à densité X et Y ont même loi si une des conditions équivalentes est vérifiée

- X et Y ont la même fonction de répartition
- X et Y ont la même densité, sauf éventuellement en un nombre fini de point

La densité nous apprend plusieurs choses sur les probabilités :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. On dit qu'une variable à densité *ne charge pas les points*. En particulier :
  - $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}(X > x)$
  - $\mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant y) = \mathbb{P}(x < X \leqslant Y) = \mathbb{P}(x \leqslant X < y) = \mathbb{P}(x < X < y)$
- Pour tout point x pour lequel $f_X(x) = F'_X(x) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(x < X < x + h) \underset{h \to 0}{\sim} h f_x(x).$$

  Autrement dit, la probabilité que X soit proche de x est proportionnelle à $f_X(x)$.

On peut alors calculer des probabilités :

Proposition 11.5

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11.1.1 Fonction d'une variable à densité.

On sait que si g est une fonction continue et X une variable aléatoire réelle, alors $g(X)$ reste une variable aléatoire réelle.

En revanche, si X est une fonction à densité, $g(X)$ ne l'est pas forcément.

EXERCICE : Imaginer un exemple de fonction g telle que quelque soit la variable à densité X, $g(X)$ ne soit pas à densité.

La méthode générale pour le vérifier consiste à chercher la fonction de répartition de $g(X)$ en fonction de F_X, et vérifier qu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 11.6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors si X est une variable aléatoire à densité, $g(X) = aX + b$ aussi, et la densité de $g(X)$ est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{g(X)}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc, si $a > 0$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(x) &= \mathbb{P}(g(X) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(aX + b \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{x-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

$F_{g(X)}$ est donc bien une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points, car F_X l'est.

On a de plus $f_{g(X)}(x) = F'_{g(X)}(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Si $a < 0$, on fait un raisonnement analogue.

□

EXERCICE : Étudier X^2 quand X est une variable aléatoire à densité.

On a en fait le théorème suivant, hors-programme :

Théorème 11.7

Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi' > 0$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ est bijective, et $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \varphi(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}(\varphi(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = F_X(\varphi^{-1}(x))$, donc $\varphi(X)$ est à densité, et la formule de dérivation d'une composée nous donne le résultat. □

NOTA : Le résultat reste vrai si $\varphi' < 0$. Dans ce cas, il faut rajouter une signe $-$ à la densité.

11.2 Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 11.8

Soit X une variable aléatoire de densité f, et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $t^r f(t)$ converge absolument. On note alors

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1 ; dans ce cas, on note

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXEMPLE : Soit X de densité

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors X admet un moment de tout ordre, et

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^r\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r+1}$$

Nota : On remarque que, comme $t^r f(t)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, on peut se contenter de montrer la convergence, qui implique la convergence absolue.

On a alors, comme pour les variables discrètes :

Théorème 11.9 – de transfert

Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans l'intervalle I d'extrémités $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire, qui admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

converge *absolument*. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a = -\infty$, $b = \infty$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi' > 0$.

On a déjà vu que $\varphi(X)$ est une variable à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)}(x) = (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)).$$

Donc $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

converge absolument, *i.e.* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|(\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

converge.

En faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on se ramène à la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on retrouve le résultat cherché. □

Corollaire 11.10

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si une variable à densité X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi, et

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Corollaire 11.11

X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

11.2.1 Espérance

Proposition 11.12 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Si X et Y admettent une espérance, alors $aX + bY$ aussi, et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b(Y).$$

Proposition 11.13

Soient X et Y deux variables à densité. Si $|X| \leqslant Y$ presque sûrement et que Y admet une espérance, alors X admet une espérance et

$$|\mathbb{E}(X)| < \mathbb{E}(Y).$$

Proposition 11.14 – Positivité et croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables à densité qui admettent une espérance.

- Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 11.15

Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance. Alors si X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 11.16

Soient X une variable à densité, et $q \leqslant r \in \mathbb{N}^*$. Alors si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Démonstration. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^q \leqslant 1 + |x|^r$, donc

$$|X|^q \leqslant 1 + |X|^r.$$

Comme $1 + |X|^r$ admet une espérance, $|X|^q$ aussi. □

En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.

11.2.2 Variance

Définition 11.17

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance. On suppose que $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet aussi une espérance.

On appelle alors *variance* de X le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 11.18

Si X admet une variance, alors on appelle *écart-type* de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

On a alors toujours la formule de Kœnig-Huygens :

Proposition 11.19 – Formule de Kœnig-Huygens

Une variable aléatoire à densité X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 11.20

Soient X une variable aléatoire à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Proposition 11.21

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une variance. Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

11.2.3 Variables centrées, réduites

Définition 11.22

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que

- X est *centrée* si X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$.
- X est *centrée réduite* si X admet un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.

On peut alors toujours construire des variables centrées ou centrées réduites :

Proposition 11.23

Soit X une variable aléatoire.

- Si X admet une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

X^* s'appelle la *variable centrée réduite associée à* X.

11.3 Lois à densité usuelles

Il faut connaître quelques lois usuelles.

11.3.1 Lois uniformes continues

Comme pour les variables discrètes, on peut définir des lois uniformes à densité, ou lois uniformes continues.

Définition 11.24

On dit que X suit une *loi uniforme sur l'intervalle* $[a,b]$ si X admet pour densité la fonction

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

NOTA : On remarquera que les lois $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{U}(]a,b[)$, $\mathcal{U}([a,b[)$ et $\mathcal{U}(]a,b])$ sont en fait identiques, puisque les densités ne diffèrent qu'en un ou deux points.

Proposition 11.25

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

On peut en fait toujours se ramener à une loi uniforme sur l'intevalle $[0,1]$:

Proposition 11.26

Soit X une variable aléatoire à densité, et soient $a < b$ deux réels. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \Leftrightarrow \frac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).$$

Proposition 11.27 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Alors X admet une espérance et une variance*, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

11.3.2 Lois exponentielles

Définition 11.28

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet pour densité la

*. et des moments de tout ordre

fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 11.29

La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Proposition 11.30 – Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance †, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On peut toujours se ramener à une loi exponentielle de paramètre 1 :

Proposition 11.31

Soit $\lambda > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que $P(X \geqslant x) > 0$ pour tout x, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \; \mathbb{P}_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x + y) = \mathbb{P}(X \geqslant y).$$

Autrement dit, une loi sans mémoire "oublie" ce qui s'est passé avant.

Plus précisément

Théorème 11.32

Soit X une variable à densité positive telle que pour tout $x \geqslant 0$, $P(X \geqslant x) > 0$. Alors X est une loi sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

†. et des moments de tout ordre

11.3.3 Lois normales

Définition 11.33

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 si elle admet pour densité la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{array}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

NOTA : On utilisera beaucoup la *loi normale centrée réduite*, *i.e.* la loi normale de paramètres 0 et 1. Sa densité est donc

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \end{array}$$

Proposition 11.34

La fonction de répartition d'une loi normale de paramètres μ et σ^2 est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \,\mathrm{d}t \end{array}$$

NOTA : On ne peut pas donner une fonction de répartition plus simple. En effet, le théorème de Liouville-Rosenlicht prouve qu'on ne peut pas calculer de primitive de $e^{-x^2/2}$ avec des fonctions élémentaires.

Définition 11.35

On note Φ la fonction de réparition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \,\mathrm{d}t$$

EXERCICE : À l'aide d'un changement de variables affine, retrouver la fonction de répartition d'une loi normale quelconque en fonction de Φ.

Proposition 11.36

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. Par parité de la fonction $e^{-t^2/2}$ ‡, on note que

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= 1-\Phi(x)\end{aligned}$$

□

Comme précédemment, on peut toujours se ramener à une loi simple :

Proposition 11.37

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Alors

$$aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2).$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{\sigma}(X-\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Les valeurs de Φ se lisent dans une *table*. Par exemple, pour obtenir $\Phi(1,14)$, on regardera à l'intersection de la ligne $1,1$ et $0,04$ pour obtenir $\Phi(1,14) = 0,8729$.

Pour les valeurs négatives de x, on utilise la relation $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$.

Enfin, pour des variables normales non centrées réduites, on utilise la proposition précédente pour s'y ramener ; par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,2)$, on aura

$$\mathbb{P}(X\leqslant 2) = \mathbb{P}(X-1\leqslant 2) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-1)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx \Phi(0,71)\approx 0,7611.$$

‡. ou changement de variable $u=-t$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Proposition 11.38

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors Z est centrée réduite, *i.e.*

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(Z) = 1.$$

On en déduit que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Démonstration. La fonction $te^{-t^2/2}$ est une fonction impaire , continue sur $\mathbb{R}$, et $te^{-t^2/2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$. Donc Z admet une espérance, qui est nulle.

Pour la même raison, Z admet un moment d'ordre 2. Calculons l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Soit donc $A > 0$.

$$\int_0^A t^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = [-2te^{-t^2/2}]_0^A + \int_0^A e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
$$\xrightarrow{A\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Par parité, on en déduit donc que $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$. On en déduit la variance par la formule de Huygens. □

11.4 Somme de variables aléatoires à densité

Dans cette partie, on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à densité. On note f (resp. g) une densité de X (resp. Y).

Théorème 11.39

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée.

Alors la fonction $f * g$ définie par

$$f * g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$f * g$ s'appelle le *produit de convolution* de f et g.

NOTA : On note que par le changement de variable $u = x - t$, on prouve que $f * g = g * f$.

Théorème 11.40

On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, de densité $f * g$.

EXERCICE : Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Alors les lois normales sont stables :

Théorème 11.41 – Stabilité des lois normales

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, s^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres $\mu + m$ et $s^2 + \sigma^2$.

11.5 Maximum et minimum de variables à densité

Proposition 11.42

Soient X et Y deux variables à densité indépendantes. On note f_X (resp. f_Y) et F_X (resp. F_Y) les densité et fonction de répartition de X (resp. Y).

Alors $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$ sont des variables à densité, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant f_M (resp. f_m) et F_M (resp. F_m) les densité et fonction de répartition de M (resp. m)

$$\begin{aligned}
F_M(x) &= F_X(x)F_Y(x) \\
f_M(x) &= f(x)F_Y(x) + F_X(x)f_Y(x) \\
F_m(x) &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) \\
f_m(x) &= f(x)(1 - F_Y(x)) + g(x)(1 - F_X(x))
\end{aligned}$$

11.6 Exercices

Exercice 1

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de densité :

   a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

   b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

   c) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t}\ln\left(1 + e^t\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

2. Déterminer si les fonctions de répartition suivantes sont les fonctions de répartitions de variables à densité ; si oui, en donner une densité :

   a) $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \frac{1}{1+e^x} \end{array}$

   b) $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

Réponse de l'exercice

1. a) Oui
   b) Oui
   c) Non
2. a) Oui
   b) Oui

Exercice 2

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{c}{1+x^2} \end{array}$.

1. Déterminer le réel c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Une variable aléatoire admettant f pour densité admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Soit X admettant f pour densité. Montrer que $\frac{1}{X}$ est une variable à densité, et qu'elle est de même loi que X.

Réponse de l'exercice

1. On trouve $c = \frac{1}{\pi}$.
2. Au voisinage de $+\infty$, on a $xf(x) \sim \frac{1}{\pi x}$, et donc X n'admet pas d'espérance. Elle n'admet donc pas non plus de variance.
3. Calculons la fonction de répartition G de $\frac{1}{X}$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$.
   - si $x = 0$, on a $G(x) = F(0)$.
   - si $x > 0$, on a
   $$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X > 0] \cap \left[X \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) + \mathbb{P}_{[X<0]}\left(X \leqslant \frac{1}{x}\right)\mathbb{P}(X < 0) \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{x}\right) + F(0) \end{aligned}$$
   - si $x < 0$, on trouve de même
   $$G(x) = F(0) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Finalement, on a
   $$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} F(0) - F\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ F(0) & \text{si } x = 0 \\ 1 - F\left(\frac{1}{x}\right) + F(0) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}.$$

   Cette fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$, sauf éventuellement en 0. Étudions la continuité en 0. On a, quand $x \to 0$, $x < 0$, $F\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$, et donc $G(x) \to F(0) = G(0)$. Quand $x \to 0$, $x > 0$, $G(x) \to F(0) = G(0)$, et donc G est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, $\frac{1}{X}$ est bien une variable à densité.
   On note que F est donnée pour tout x par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$
   On montre l'égalité des fonctions de répartitions F et G en utilisant la formule
   $$\forall x \neq 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

Réponse de l'exercice

On a $\mathrm{Im}(Y) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n-1) \\ &= \mathbb{P}(n-1 \leqslant X < n) \\ &= \int_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= (1-e^{-\lambda})e^{-(n-1)\lambda}\end{aligned}$$

La variable Y suit donc une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

Exercice 4

Soit X une variable à densité, de densité f. On suppose que X est positive, *i.e.* que f est nulle sur $\mathbb{R}^-$. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall a > 0,\ \int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

   $$0 \leqslant a\mathbb{P}(X > a) \leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire que X admet une espérance, et la calculer.

3. On suppose maintenant que X admet une espérance.

   a) Montrer que pour tout $a > 0$,

   $$a\mathbb{P}(X > a) \leqslant \mathbb{E}(X).$$

   b) En déduire que $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge, et la calculer.

Réponse de l'exercice

1. Soient les fonctions $u\colon t \mapsto t$ et $v\colon t \mapsto \mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^a u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\mathbb{P}(X > t)]_0^a + \int_0^a tF'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. a) L'inégalité de gauche est claire. On a de plus

$$a\mathbb{P}(X > a) = 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > a)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$$

par croissance de l'intégrale.

b) On a pour $a > 0$

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t) = \int_{0}^{a} \mathbb{P}(X > t) - \int_{0}^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}(X > t) \to 0$$

quand $a \to \infty$, par hypothèse de convergence de l'intégrale.
Donc par la question 1, l'intégrale $\int_0^\infty tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

3. a) C'est une conséquence directe de l'inégalité de Markov.

b) On a donc

$$\int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{E}(X) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\mathbb{E}(X).$$

Ainsi, l'intégrale de gauche converge, et donc

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(X).$$

Exercice 5

1. Démontrer que les lois exponentielles sont sans mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire positive à densité f continue, sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle.

Réponse de l'exercice

1. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X\geqslant x]}(X \geqslant x+y) &= \frac{\mathbb{P}(X \geqslant x+y)}{\mathbb{P}(X \geqslant x)} \\ &= \frac{1-F(x+y)}{1-F(x)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} \\ &= e^{-\lambda y} \\ &= \mathbb{P}(X \geqslant y)\end{aligned}$$

2. Soit $G = 1 - F : t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$. On a alors par hypothèse
$$G(x + y) = G(x)G(y).$$
Or la fonction f est continue, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à x, puis en prenant $x = 0$, on obtient alors
$$\forall y,\ G'(y) = G'(0)G(y).$$
La fonction G est donc de la forme $y \mapsto Ke^{-\lambda y}$. Comme X est positive, on a donc $K = 1$, et on retrouve alors bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle.

Exercice 6

Dans cet exercice, on utilisera la table de la loi normale.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(-t < x < t) \approx 0,95$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$. Donner des valeurs approchées de
   a) $\mathbb{P}(X < 7,5)$
   b) $\mathbb{P}(X > 8,5)$
   c) $\mathbb{P}(6,5 < X < 10)$
   d) $\mathbb{P}_{[X>5]}(X > 6)$.

Réponse de l'exercice

1. On trouve $t = 1,96$.
2. On trouve, dans l'ordre, $0,4$, $0,4$, $0,6$, $0,9015$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si $X + \frac{1}{X}$ admet une espérance, alors X aussi.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Réponse de l'exercice

Soit donc f une densité de X.

1. Par théorème de transfert, on a donc $\int_0^\infty \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$ qui converge.
   Or pour tout $t > 0$, on a $0 \leqslant t \leqslant t + \frac{1}{t}$, et $f(t) \geqslant 0$, et donc $0 \leqslant tf(t) \leqslant \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t)$.
   Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on a donc la convergence de $\int_0^\infty tf(t)\,\mathrm{d}t$, et donc X admet une espérance.

2. On considère une loi exponentielle strictement positive de paramètre 1, *i.e.* de densité

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t <\leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{array}.$$

Alors X admet une espérance, qui vaut 1.

Mais quand $t \to 0$, $t > 0$, on a $\left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) \sim \frac{1}{t}$. Ainsi, pour t au voisinage de 0, on a donc $\left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) \geqslant \frac{1}{2t}$, et par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^\infty \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge : $X + \frac{1}{X}$ n'admet donc pas d'espérance.

Exercice 8

Rappel : algorithme de dichotomie.

On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α.

On définit les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

- *$a_0 = a$ et $b_0 = b$*
- *pour tout entier k, on note $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, et*
  - *si $g(a_k)g(c_k) \leqslant 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$*
  - *sinon, alors $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.*

Les suites (a_k) et (b_k) convergent alors toutes les deux vers α.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, justifier que $\frac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Montrer que Φ est une densité de probabilité.
5. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
6. Montrer que $\forall t > \alpha,\ f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.

7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Réponse de l'exercice

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$f' : x \mapsto \frac{-1}{(x+1)x^2}.$$

Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec des limites $+\infty$ en 0 et 0 en $+\infty$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et par théorème de la bijection, induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, 1 admet un unique antécédent α.

2. Avec Python, on trouve $f(\frac{1}{3}) > 1$ et $f(\frac{1}{2}) < 1$. On a donc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(\alpha) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right),$$

puis par décroissance de f, $\frac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

3. On propose le code

```
def dicho(n,a,b,f):
    while (abs(b-a) > 10**(-n)):
        c = (a+b)/2
        if (f(a)-1)*(f(c)-1) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2

```

4. La fonction Φ est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en α. La fonction étant nulle sur $]-\infty, \alpha]$, on étudie la convergence de son intégrale entre α et $+\infty$. Soit $x > \alpha$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x \Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^x -f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(\alpha) - f(x) \\ &\xrightarrow[x\to\infty]{} f(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

On a donc bien une densité de probabilité.

5. La fonction $t \mapsto t\Phi(t)$ est nulle sur $]-\infty, \alpha]$, et positive sur $]\alpha, +\infty[$; on étudie donc la convergence sur $]\alpha, +\infty[$. Soit $x > \alpha$.

On a

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x t\Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^x \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) + \ln(\alpha+1) - \ln(\alpha) \\ &\xrightarrow[x\to\infty]{} \ln(\alpha+1) - \ln(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale proposée est bien absolument convergente.

Remarque : on aurait pu simplement majorer $t\Phi(t)$ par $\frac{1}{t^2}$, dont l'intégrale converge, et utiliser le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, mais la question 7 nous demande de toutes façons de calculer l'intégrale.

6. C'est une simple vérification.
7. L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ étant absolument convergente, X admet bien une espérance, et par la question 5, on a par définition de α

$$\mathbb{E}(X) = \ln(\alpha+1) - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - 1 \in [1,2].$$

On peut aussi calculer l'intégrale en utilisant la question 6 :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2} + f'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int_{\alpha}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité, les deux intégrales convergeant} \\ &= \frac{1}{\alpha} - 1\end{aligned}$$

Exercice 9

On considère une variable X qui suit la loi normale centrée réduite. On admet que X admet des moments à tout ordre.

1. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une estimation du moment d'ordre n de X pour tout entier n non nul.

   On pourra utiliser la fonction `gauss(m,s)` du module `random` pour simuler une loi normale $\mathcal{N}(m,s)$.

   Donner en particulier des estimations de $\mathbb{E}(X^n)$ pour $n \in [\![1,6]\!]$.
3. Calculer simplement la valeur de $\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right)$ pour tout entier n.

Pour tout entier n, on pose $U_n = \ln\left(\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)\right)$.

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \ln(2n+1)$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(2i-1)$, puis que $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
6. Établir à l'aide de Python une conjecture sur la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n\ln(n)}$.
7. Montrer que pour tout $i \geqslant 2$,

$$\int_{2i-3}^{2i-1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln(2i-1) \leqslant \int_{2i-1}^{2i+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)(\ln(2n-1) - 1) \leqslant U_n \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(2n+1) - 1).$$

9. Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, $\ln(ax+b) + c \underset{x\to\infty}{\sim} \ln(x)$.
10. En déduire que $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Réponse de l'exercice

1. On a directement $\mathbb{E}(X) = 0$, et par la formule de König-Huygens, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$.
2. On propose

```python
def moment(n):
    S = 0
    N = 100000
    for _ in range(N):
        S += rd.gauss(0,1)**n/N
    return S
for i in range(1,7):
    print("Moment d'ordre",i,":",moment(i))

```

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que X admet un moment d'ordre $2n+1$, et donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge, où φ est la densité usuelle de X.
   La fonction $t \mapsto t^{2n+1}\varphi(t)$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, et l'intervalle d'intégration étant $\mathbb{R}$ donc symétrique par rapport à 0, on trouve
   $$\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0.$$
4. Soient $u\colon t \mapsto t^{2n+1}$ et $v\colon t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par intégration par parties, on a donc sur un segment $[a, b]$
   $$\begin{aligned}\int_a^b t^{2n+2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^{2n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^b + (2n+1)\int_a^b t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[a\to-\infty,\ b\to\infty]{} (2n+1)\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   par croissances comparées, et car X admet un moment d'ordre $2n$.
   En normalisant, et en passant au logarithme, on a bien l'égalité demandée.
5. Une rapide récurrence permet de montrer la premier inégalité, en utilisant $U_0 = 0$.
   On a alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{2n}) &= e^{U_n} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\end{aligned}$$
   en rajoutant les termes pairs dans le produit.
6. Avec Python, il semble que la suite $\frac{U_n}{n\ln(n)}$ converge vers 1.
7. Soit $i \geqslant 2$. Pour tout $x \in [2i-3, 2i-1]$, on a par croissance du logarithme
   $$\ln(x) \leqslant \ln(2i-1),$$
   puis la première inégalité par croissance de l'intégrale.
   La seconde inégalité se montre de la même manière.

8. En sommant de $i = 2$ à n, on a donc par relation de Chasles

$$\int_1^{2n-1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2U_n \leqslant \int_3^{2n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive de ln étant $x \mapsto x\ln(x) - x$, on a donc

$$(2n-1)\ln(2n-1) - (2n-1) + 1 \leqslant 2U_n \leqslant (2n+1)\ln(2n+1) - (2n+1) - (3\ln(3) - 3),$$

et on retrouve l'inégalité demandée, car $\frac{1}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{2}(3\ln(3) - 3 \geqslant 0$.

9. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(ax+b)+c}{\ln(x)} &= 1 + \ln\left(a + \frac{b}{x}\right) + \frac{c}{\ln(x)} \\ &\to 1\end{aligned}$$

10. En divisant par $n\ln(n)$ dans l'inégalité du 8, on a alors

$$\frac{2n-1}{2n}\frac{\ln(2n-1)-1}{\ln(n)} \leqslant \frac{U_n}{n\ln(n)} \leqslant \frac{2n+1}{2n}\frac{\ln(2n+1)-1}{\ln(n)}.$$

Par la question précédente et encadrement des limites, on a bien $U_n \sim n\ln(n)$.