12 Réduction des endomorphismes

12.1 Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme

Dans toute cette section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 12.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de f si

- On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ si

- On notera $E_\lambda(f)$ l'ensemble

  $E_\lambda(f) =$

  appelé *sous-espace propre de f associé à λ*.

On note alors $\mathrm{Spec}(f)$, appelé *spectre de f* l'ensemble des valeurs propres de f.

Notae : On note donc que $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, auxquels on ajoute 0.

On note de plus que si λ n'est pas valeur propre de f, alors $E_\lambda(f) = \{0\}$.

On définit de la même façon les éléments propres d'une matrice :

Définition 12.2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de A si

- On dit que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *colonne propre* de A associé à la valeur propre λ si

- On notera $E_\lambda(A)$ le *sous-espace propre* de A associé à λ :

$$E_\lambda(A) =$$

On note alors $\mathrm{Spec}(A)$, appelé *spectre de A* l'ensemble des valeurs propres de A.

On a alors le théorème attendu :

Proposition 12.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de f dans une base de E. Alors :

-
-

Autrement dit, chercher les éléments propres de f revient exactement à trouver les éléments propre de n'importe quelle matrice représentant f.

Corollaire 12.4

Deux matrices semblables ont exactement le même spectre, et leurs sous-espaces propres sont de même dimension.

NOTA : Ceci nous donne une caractérisation de plus pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, comme on l'avait vu pour la trace et le rang.

Proposition 12.5 – Structure des sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus,

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E_\lambda(f) =$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, alors □

Méthode de recherche des valeurs propres

En pratique, on utilisera la proposition suivante pour trouver des valeurs propres :

Proposition 12.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base. Alors sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de f

(ii)

(iii)

Méthode

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme, on fera donc dans l'ordre :

- Écrire la matrice A de f dans une base
- Pour un λ quelconque, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_n$ avec la méthode de Gauss. *Attention : il faudra souvent distinguer certaines valeurs de λ.*
- Regarder pour quelles valeurs de λ ce rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace.

NOTA : Dans la méthode du pivot, on essayera tant que possible d'échanger des lignes pour éviter les λ sur la diagonale, sauf tout en bas à droite. Si c'est impossible, il faudra alors distinguer des valeurs de λ.

EXERCICE : Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (2x+z, x+y+z, x+z).$$

On note qu'avec cette méthode, on trouve directement (en utilisant le théorème du rang) la dimension des sous-espaces propres : il suffit de remplacer λ par les valeurs trouvées, et d'utiliser la forme échelonnée pour trouver le rang de $A - \lambda I_n$.

Cas particuliers Dans certains cas, il est plus simple de trouver les valeurs propres.

Pour une matrice 2×2, on pourra utiliser le directement la proposition suivante :

Proposition 12.7

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow$$

Démonstration. On sait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si
Or le déterminant de $A - \lambda I_2$ vaut

$\det(A - \lambda I_2) =$

□

EXERCICE : Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Pour une matrice triangulaire, on a

Proposition 12.8

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est *inférieure ou égale*

Démonstration. On sait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si
.

Il suffit donc d'écrire $A - \lambda I_n$ pour se convaincre du résultat.

De plus, si $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ et que λ apparaît k fois sur la diagonale, alors $A - \lambda I_n$ possède exactement . On a donc $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant$, et on en déduit

$$\dim(E_\lambda(A)) \leqslant$$

□

Pour les matrice diagonales, le résultat reste le même, avec une amélioration pour les dimensions des sous-espaces propres.

Corollaire 12.9

Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est égale

12.2 Somme de sous-espaces propres

Définition 12.10

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe* si

On note alors la somme $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

C'est équivalent à dire que concaténer des bases des F_i donne une base de la somme.

Théorème 12.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes deux à deux de f. Alors la somme de sous-espaces propres $\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)$ est une somme directe.

Démonstration. Soient donc pour tout i $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = 0$.

Soit P_i un polynôme† tel que On a alors

$$
\begin{aligned}
P_i(f)(x_1 + \cdots + x_p) &= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

Comme la somme $x_1 + \cdots x_p$ est nulle, on en déduit . □

La somme étant directe, en concaténant des bases de chacun des sous-espaces propres, on obtient une base de la somme. Ainsi :

*. Cette notion est hors-programme en BCPST
†. donné par le théorème d'interpolation de Lagrange

Corollaire 12.12

La dimension de la somme des sous-espaces propres de f est la somme des dimensions des sous-espaces propres :

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Ainsi, chaque sous-espace propre étant de dimension au moins 1, on peut majorer le nombre de valeurs propres :

Corollaire 12.13

Un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède au plus valeurs propres.

Corollaire 12.14

Si un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres distinctes, alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.

12.3 Diagonalisation

Le but de la recherche de valeurs propres et sous-espaces propres est de pouvoir trouver des bases dans lesquelles les matrices sont simples, et au mieux diagonales.

Définition 12.15

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *diagonalisable*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est *diagonalisable*

12.3.1 Base de vecteurs propres

Commençons par remarquer que si on a une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors les e_i sont nécessairement des vecteurs propres de f.

Réciproquement :

Proposition 12.16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors

Démonstration. Soient donc $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus E_{\lambda_k}(f)$ est directe, et que $\mu_i x_i \in E_{\lambda_i}(f)$,

Comme on a choisi des vecteurs propres, donc non nuls, on obtient bien $\mu_i = 0$. □

Ceci nous donne un premier critère de diagonalisabilité :

Proposition 12.17

Si un endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes, alors

Plus précisément, une base dans laquelle la matrice de f est diagonale est constituée de vecteurs propres pour chaque valeur propre.

Démonstration. On a donc, d'après le résultat précédent, une famille libre de n vecteurs propres, et donc une base de E. □

Plus généralement on utilisera le théorème suivant :

Théorème 12.18

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii)

(iii)

(iv)

Démonstration. On va faire une preuve cyclique.

- *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* : Soit donc $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

  Alors les valeurs propres de f sont exactement
  , et la dimension de $E_\lambda(f)$ est exactement

  Comme D a n coefficients diagonaux, on en tire donc

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* : On sait déjà que la somme des sous-espaces propres de f est directe, et que

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) =$$

  Cette somme directe est donc de même dimension que E, et donc égale à E.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* : Soient $\mathcal{B}_\lambda$ des bases de tous les $E_\lambda(f)$. Alors, comme la somme est directe, la concaténation de toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ donne

- *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)* : Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ une base de vecteurs propres :
  Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  et donc

□

Méthode

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on veut, si possible, diagonaliser. Les étapes à suivre sont donc :

- Déterminer les valeurs propres de A.
- Chercher la dimension de chacun des sous-espaces propres.
- Si la somme des dimensions vaut n, alors la matrice est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.

On se place dans le cas où la matrice est diagonalisable.

- On cherche une base de chacun des sous-espace propres.
- On concatène toutes ces bases pour en former une de E, notée $\mathcal{B}$. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$, on a bien

$$A = PDP^{-1}$$

où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

Exemple : On veut étudier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On cherche les valeurs propres de A. On échelonne donc la matrice $A - \lambda I_3$:

- On cherche donc une base de chacun des sous-espaces propres, qui sont tous de dimension 1 : il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.
  - $\lambda = 1$: on a déjà échelonné la matrice $A - 1I_3$. Le système à résoudre est donc

    On trouve alors par exemple $(x, y, z) =$ $= e_1$.
  - $\lambda = 2$: le système à résoudre est

    On trouve par exemple $(x, y, z) =$ $= e_2$.
  - $\lambda = 3$: le système à résoudre est

    On trouve par exemple $(x, y, z) =$ $= e_3$.
- La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et en posant

  $P =$ et $D =$

  on a la relation

On donne le théorème suivant, qu'on détaillera dans un autre chapitre :

Théorème 12.19 – spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors

12.4 Applications de la diagonalisation

On a déjà vu dans les chapitres précédent à quoi servait une matrice simple :

12.4.1 Calcul de puissances et d'inverses

On a le résultat suivant, à redémontrer à chaque fois :

Proposition 12.20

Si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible, alors pour tout entier n,

$$A^n =$$

Si A est inversible, alors D aussi, et

$$A^{-1} =$$

Si D est simple, par exemple diagonale, il est simple de calculer sa puissance n-ième. On ramène donc un calcul de puissance à seulement deux produits matriciels.

12.4.2 Étude de suites récurrentes linéaires

On considère une suite récurrente définie par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} &= du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} &= gu_n + hv_n + iw_n \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$. Alors, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a la relation

$$X_{n+1} =$$

On a alors, par une récurrence immédiate

Proposition 12.21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n =$.

NOTA : C'est en particulier utile pour les suites définies par récurrence à plusieurs termes, par exemple

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On applique alors la méthode précédente en posant $v_n = u_{n+1}$, pour obtenir

$$\begin{cases} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= bu_n + av_n \end{cases}$$

et donc en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on obtient, en posant $X_n = \binom{u_n}{v_n}$ pour tout n,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

12.4.3 Similitude de matrices

On a vu que deux matrices semblables ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension, mais que la réciproque était fausse.

En revanche, si les matrices sont diagonalisables, alors

Proposition 12.22

Si A et B sont diagonalisables, alors A et B sont semblables si et seulement si

Démonstration. On a déjà vu le sens direct.

Pour le sens réciproque, si elles sont diagonalisables, elles seront toutes les deux semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité de la similitude, A et B seront bien semblables. $\square$

12.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Pour les matrices de l'exercice précédent, dire si elles sont diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, et le cas échéant, expliciter la matrice diagonale et la matrice de passage.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre soit diagonalisable.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. On suppose que $f \circ f = f$ (on dit alors que f est un projecteur).
   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(f) = 0$.
   a) Montrer que si x est vecteur propre de f associé à une valeur propre λ et $p \in \mathbb{N}$, alors x est vecteur propre de f^p, et préciser la valeur propre associée.
   b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 2$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que 0 est valeur propre de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

2. Trouver une valeur propre non nulle de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

3. Montrer que J est diagonalisable, et donner une matrice diagonale à laquelle J est semblable.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 7

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B, vues comme matrices réelles, ont même rang, même trace et même spectre.

Qu'en est-il si on les voit comme matrices complexes ?

A et B sont-elles semblables ?

Exercice 8

Soit $n \geqslant 2$. Soient , $b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots & b \\ b & a & b & a & \cdots & a \\ a & b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & a & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que $0 \in \mathrm{Spec}(A)$, et la dimension de $E_0(A)$.

2. Trouver deux vecteurs propres de A non colinéaires, associés à des valeurs propres non nulles.

3. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 9

1. Montrer que tout polynôme 1-périodique est constant.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X+2)P(X) - XP(X+1) \end{array}$.

   a) Montrer que φ est un endomorphisme.

   b) Soit $P \in \ker(\varphi)$. En calculant $P(0)$ et $P(-1)$, déterminer $\ker(\varphi)$.

c) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de φ.

Indication : on pourra considérer les polynômes $P_k = \prod_{i=0}^{k}(X+i)$.

Exercice 10

(i) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v, *i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(u),\ \forall x \in E_\lambda(u),\ v(x) \in E_\lambda(u).$$

(ii) En déduire que si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 11

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Pour une telle suite, on pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

   En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leurs sous-espaces propres associés.

   b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. a) Calculer P^{-1}.

   b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

Exercice 12

On pourra utiliser pour les programmes ***Python*** *la fonction* `linalg.matrix_rank()` *du module* `numpy` *qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.*

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```python
import numpy as np
V = np.array( [ [1,2,1], [2,3,2] ] )
print(np.linalg.matrix_rank(V) )

```

Python renvoie alors la valeur : 2.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A.

1. a) Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.

   On pourra représenter les vecteurs par des listes.

   b) Écrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de A.

2. a) Vérifier que les vecteurs $(1, -2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.

   b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. a) Écrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).

   b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).

4. Soit N un entier naturel non nul, une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N; N]\!]^3$.

   a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?

b) Quelle est la limite de $N \ln\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$?
En déduire la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 13

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python.
La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur R vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.