12 Réduction des endomorphismes

12.1 Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme

Dans toute cette section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 12.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de f si
$$\exists x \in E\backslash\{0\},\ f(x) = \lambda x.$$
- On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ si $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.
- On notera $E_\lambda(f)$ l'ensemble
$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda(x)\} = \ker(f - \lambda \mathrm{id}),$$
appelé *sous-espace propre de f associé à λ*.

On note alors $\mathrm{Spec}(f)$, appelé *spectre de f* l'ensemble des valeurs propres de f.

Notae : On note donc que $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, auxquels on ajoute 0.

On note de plus que si λ n'est pas valeur propre de f, alors $E_\lambda(f) = \{0\}$.

On définit de la même façon les éléments propres d'une matrice :

Définition 12.2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de A si

$$\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\{0\},\ AX = \lambda X.$$

- On dit que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *colonne propre* de A associé à la valeur propre λ si $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

- On notera $E_\lambda(A)$ le *sous-espace propre* de A associé à λ :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

On note alors $\mathrm{Spec}(A)$, appelé *spectre de A* l'ensemble des valeurs propres de A.

On a alors le théorème attendu :

Proposition 12.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de f dans une base de E. Alors :

- $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$
- $x \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow \mathrm{mat}(x) \in E_\lambda(A)$

Autrement dit, chercher les éléments propres de f revient exactement à trouver les éléments propre de n'importe quelle matrice représentant f.

Corollaire 12.4

Deux matrices semblables ont exactement le même spectre, et leurs sous-espaces propres sont de même dimension.

NOTA : Ceci nous donne une caractérisation de plus pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, comme on l'avait vu pour la trace et le rang.

Proposition 12.5 – Structure des sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus,

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow \dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, alors il existe x non nul dans $E_\lambda(f)$, qui est donc non réduit à $\{0\}$. Réciproquement, si $\lambda \notin \mathrm{Spec}(f)$, alors le seul élément tel que $f(x) = \lambda x$ est 0. □

Méthode de recherche des valeurs propres

En pratique, on utilisera la proposition suivante pour trouver des valeurs propres :

Proposition 12.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base. Alors sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de f

(ii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

(iii) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme, on fera donc dans l'ordre :

- Écrire la matrice A de f dans une base
- Pour un λ quelconque, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_n$ avec la méthode de Gauss. *Attention : il faudra souvent distinguer certaines valeurs de λ.*
- Regarder pour quelles valeurs de λ ce rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace.

NOTA : Dans la méthode du pivot, on essayera tant que possible d'échanger des lignes pour éviter les λ sur la diagonale, sauf tout en bas à droite. Si c'est impossible, il faudra alors distinguer des valeurs de λ.

EXERCICE : Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + z, x + y + z, x + z).$$

On note qu'avec cette méthode, on trouve directement (en utilisant le théorème du rang) la dimension des sous-espaces propres : il suffit de remplacer λ par les valeurs trouvées, et d'utiliser la forme échelonnée pour trouver le rang de $A - \lambda I_n$.

Cas particuliers Dans certains cas, il est plus simple de trouver les valeurs propres.

Pour une matrice 2×2, on pourra utiliser le directement la proposition suivante :

Proposition 12.7

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Démonstration. On sait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant de $A - \lambda I_2$ vaut

$$\det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

□

EXERCICE : Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Pour une matrice triangulaire, on a

Proposition 12.8

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est *inférieure ou égale* au nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale.

Démonstration. On sait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls . Il suffit donc d'écrire $A - \lambda I_n$ pour se convaincre du résultat.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ et que λ apparaît k fois sur la diagonale, alors $A - \lambda I_n$ possède exactement $n - k$ coefficients diagonaux non nuls . On a donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - k$, et on en déduit

$$\dim(E_\lambda(A)) \leqslant n - (n - k) = k.$$

□

Pour les matrice diagonales, le résultat reste le même, avec une amélioration pour les dimensions des sous-espaces propres.

Corollaire 12.9

Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale.

12.2 Somme de sous-espaces propres

Définition 12.10

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe * si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 0 \Rightarrow \forall k,\ x_k = 0.$$

On note alors la somme $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

C'est équivalent à dire que concaténer des bases des F_i donne une base de la somme.

Théorème 12.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes deux à deux de f. Alors la somme de sous-espaces propres $\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)$ est une somme directe.

Démonstration. Soient donc pour tout i $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = 0$.

Soit P_i un polynôme † tel que $P_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On a alors

$$\begin{aligned} P_i(f)(x_1 + \cdots + x_p) &= P_i(f)(x_1) + \cdots + P_i(f)(x_p) \\ &= P_i(\lambda_1)x_1 + \cdots + P_i(\lambda_p)x_p \\ &= x_i \end{aligned}$$

Comme la somme $x_1 + \cdots x_p$ est nulle, on en déduit $x_i = 0$. □

La somme étant directe, en concaténant des bases de chacun des sous-espaces propres, on obtient une base de la somme. Ainsi :

*. Cette notion est hors-programme en BCPST

†. donné par le théorème d'interpolation de Lagrange

Corollaire 12.12

La dimension de la somme des sous-espaces propres de f est la somme des dimensions des sous-espaces propres :

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)).$$

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Ainsi, chaque sous-espace propre étant de dimension au moins 1, on peut majorer le nombre de valeurs propres :

Corollaire 12.13

Un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède au plus n valeurs propres.

Corollaire 12.14

Si un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres distinctes, alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.

12.3 Diagonalisation

Le but de la recherche de valeurs propres et sous-espaces propres est de pouvoir trouver des bases dans lesquelles les matrices sont simples, et au mieux diagonales.

Définition 12.15

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est *diagonalisable* s'il existe des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

12.3.1 Base de vecteurs propres

Commençons par remarquer que si on a une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors les e_i sont nécessairement des vecteurs propres de f.

Réciproquement :

Proposition 12.16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors si $x_i \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0\}$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre de E.

Démonstration. Soient donc $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus E_{\lambda_k}(f)$ est directe, et que $\mu_i x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, chaque $\mu_i x_i$ est nul.

Comme on a choisi des vecteurs propres, donc non nuls, on obtient bien $\mu_i = 0$. □

Ceci nous donne un premier critère de diagonalisabilité :

Proposition 12.17

Si un endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Plus précisément, une base dans laquelle la matrice de f est diagonale est constituée de vecteurs propres pour chaque valeur propre.

Démonstration. On a donc, d'après le résultat précédent, une famille libre de n vecteurs propres, et donc une base de E. □

Plus généralement on utilisera le théorème suivant :

Théorème 12.18

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$

(iii) E est somme directe des sous-espaces propres de f

(iv) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de E.

Démonstration. On va faire une preuve cyclique.

- *(i) ⇒ (ii)* : Soit donc $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

  Alors les valeurs propres de f sont exactement les coefficients diagonaux de D , et la dimension de $E_\lambda(f)$ est exactement le nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de D.

Comme D a n coefficients diagonaux, on en tire donc $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* : On sait déjà que la somme des sous-espaces propres de f est directe, et que

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n.$$

Cette somme directe est donc de même dimension que E, et donc égale à E.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* : Soient $\mathcal{B}_\lambda$ des bases de tous les $E_\lambda(f)$. Alors, comme la somme est directe, la concaténation de toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ donne une base de la somme, et donc une base de E.

- *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)* : Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de vecteurs propres : $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

et donc f est diagonalisable.

□

Méthode

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on veut, si possible, diagonaliser. Les étapes à suivre sont donc :

- Déterminer les valeurs propres de A.
- Chercher la dimension de chacun des sous-espaces propres.
- Si la somme des dimensions vaut n, alors la matrice est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.

On se place dans le cas où la matrice est diagonalisable.

- On cherche une base de chacun des sous-espace propres.
- On concatène toutes ces bases pour en former une de E, notée $\mathcal{B}$. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}$, on a bien
$$A = PDP^{-1}$$
où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

EXEMPLE : On veut étudier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On cherche les valeurs propres de A. On échelonne donc la matrice $A - \lambda I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (2-\lambda)L_1]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & -5+2\lambda & (2-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix}$$

On traite le cas $\lambda \neq 2$.

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3 - (-5+2\lambda)L_2]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)^2(4-\lambda) - (-5+2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda^2-4x+3) \end{pmatrix}$$

Finalement, cette matrice est de rang strictement inférieur à 3 quand le coefficient en bas à droite est nul, *i.e.* si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. Dans ces cas, la matrice est de rang 2, et donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Si $\lambda = 2$, alors on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2.

Finalement, on a

$$\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}.$$

On est dans le cas où A a trois valeurs propres distinctes en dimension 3, et donc A est diagonalisable.

- On cherche donc une base de chacun des sous-espaces propres, qui sont tous de dimension 1 : il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.
  - $\lambda = 1$: on a déjà échelonné la matrice $A - 1I_3$. Le système à résoudre est donc

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases}$$

    On trouve alors par exemple $(x, y, z) = (1, 1, 1) = e_1$.
  - $\lambda = 2$: le système à résoudre est

$$\begin{cases} -x - 2y + 2z & = 0 \\ -y & = 0 \end{cases}$$

    On trouve par exemple $(x, y, z) = (2, 0, 1) = e_2$.
  - $\lambda = 3$: le système à résoudre est

$$\begin{cases} -x - 2y + z & = 0 \\ -y + z & = 0 \end{cases}$$

    On trouve par exemple $(x, y, z) = (-1, 1, 1) = e_3$.
- La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

  on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

On donne le théorème suivant, qu'on détaillera dans un autre chapitre :

Théorème 12.19 – spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable.

12.4 Applications de la diagonalisation

On a déjà vu dans les chapitres précédent à quoi servait une matrice simple :

12.4.1 Calcul de puissances et d'inverses

On a le résultat suivant, à redémontrer à chaque fois :

Proposition 12.20

Si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible, alors pour tout entier n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Si A est inversible, alors D aussi, et

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Si D est simple, par exemple diagonale, il est simple de calculer sa puissance n-ième. On ramène donc un calcul de puissance à seulement deux produits matriciels.

12.4.2 Étude de suites récurrentes linéaires

On considère une suite récurrente définie par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} & = du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} & = gu_n + hv_n + iw_n \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$. Alors, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a la relation

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On a alors, par une récurrence immédiate

Proposition 12.21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Nota : C'est en particulier utile pour les suites définies par récurrence à plusieurs termes, par exemple

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On applique alors la méthode précédente en posant $v_n = u_{n+1}$, pour obtenir

$$\begin{cases} u_{n+1} & = v_n \\ v_{n+1} & = bu_n + av_n \end{cases}$$

et donc en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on obtient, en posant $X_n = \binom{u_n}{v_n}$ pour tout n,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

12.4.3 Similitude de matrices

On a vu que deux matrices semblables ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension, mais que la réciproque était fausse.

En revanche, si les matrices sont diagonalisables, alors

Proposition 12.22

Si A et B sont diagonalisables, alors A et B sont semblables si et seulement si elles ont même spectre et des sous-espaces propres de mêmes dimensions.

Démonstration. On a déjà vu le sens direct.

Pour le sens réciproque, si elles sont diagonalisables, elles seront toutes les deux semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité de la similitude, A et B seront bien semblables. $\square$

12.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Réponse de l'exercice

1. $\text{Spec} = \{1\}$, $E_1 = \text{Vect}((2,1))$.
2. $\text{Spec} = \{1,3\}$, $E_1 = \text{Vect}((2,1))$ et $E_3 = \text{Vect}((3,2))$.
3. $\text{Spec} = \{1,4,6\}$, $E_1 = \text{Vect}((1,0,0))$, $E_4 = \text{Vect}((2,3,0))$ et $E_6 = \text{Vect}((16,25,10))$.
4. $\text{Spec} = \{-2,2\}$, $E_{-2} = \text{Vect}((0,-1,1),(1,0,0))$ et $E_2 = \text{Vect}((1,4,0))$.
5. $\text{Spec}_{\mathbb{R}} = \{2\}$ et $\text{Spec}_{\mathbb{C}} = \{2, 2+i\sqrt{6}, 2-i\sqrt{6}\}$, $E_2 = \text{Vect}((3,2,0))$, $E_{2+i\sqrt{6}} = \text{Vect}((2, 1+i\frac{\sqrt{6}}{3}, 1))$ et $E_{2-i\sqrt{6}} = \text{Vect}((2, 1-i\frac{\sqrt{6}}{3}, 1))$.
6. $\text{Spec} = \{2,3,4\}$, $E_2 = \text{Vect}((1,0,1))$, $E_3 = \text{Vect}((1,1,1))$ et $E_4 = \text{Vect}((-1,0,1))$.

Exercice 2

Pour les matrices de l'exercice précédent, dire si elles sont diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, et le cas échéant, expliciter la matrice diagonale et la matrice de passage.

Réponse de l'exercice

1. Pas diagonalisable
2. Diagonalisable
3. Diagonalisable
4. Diagonalisable
5. Pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$
6. Diagonalisable

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre soit diagonalisable.

Réponse de l'exercice

Soit f un tel endomorphisme. Soit alors $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, tous associés à la valeur propre λ.

Alors pour tout veteur x, on a $f(x) = \lambda x$, et f est donc une homothétie.

Réciproquement, les homothéties vérifient bien cette propriété.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. On suppose que $f \circ f = f$ (on dit alors que f est un projecteur).
   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(f) = 0$.
   a) Montrer que si x est vecteur propre de f associé à une valeur propre λ et $p \in \mathbb{N}$, alors x est vecteur propre de f^p, et préciser la valeur propre associée.
   b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

Réponse de l'exercice

1. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. On a alors $f(f(x)) = f(x)$, et donc $\lambda^2 x = x$.
   Comme $x \neq 0$, on a alors $\lambda^2 = \lambda$, puis le résultat voulu.
2. a) On montre facilement par récurrence que $f^p(x) = \lambda^p x$.
   b) On a donc $P(f)(x) = P(\lambda)x = 0$, et donc $P(\lambda) = 0$.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 2$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que 0 est valeur propre de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Trouver une valeur propre non nulle de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que J est diagonalisable, et donner une matrice diagonale à laquelle J est semblable.

Réponse de l'exercice

1. On a directement $\mathrm{rg}(J) = 1$, et donc par théorème du rang, $\dim\ker(J) = n - 1$. Ainsi, 0 est bien valeur propre de J, et son sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

2. On note que $JU = nU$ où U est la matrice colonne ne contenant que des 1, et donc n est valeur propre de J.

   La somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvant excéder n, on a nécessairement un sous-espace propre associé de dimension 1.

3. Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de J est égale à n, et donc J est diaonalisable, semblable à $\operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \subseteq \operatorname{Im}(f).$$

Réponse de l'exercice

Soit donc x un vecteur propre associé à λ. On a donc $f(x) = \lambda x$, et donc $f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = x$. On a bien $x \in \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 7

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B, vues comme matrices réelles, ont même rang, même trace et même spectre.

Qu'en est-il si on les voit comme matrices complexes ?

A et B sont-elles semblables ?

Réponse de l'exercice

Le deux matrices ont même rang (2), même trace (0). Les valeurs propres de A sont les racines de

$$X^2 + 1 = 0,$$

et celles de B les racines de

$$X^2 + 4 = 0.$$

Elles ont donc même spectre ($\emptyset$).

En revanche, leurs spectres complexes sont différents ($\{i, -i\}$ pour A, et $\{2i, -2i\}$ pour B).

Les deux matrices ne sont donc pas semblables.

Exercice 8

Soit $n \geqslant 2$. Soient $, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots & b \\ b & a & b & a & \cdots & a \\ a & b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & a & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que $0 \in \operatorname{Spec}(A)$, et la dimension de $E_0(A)$.

2. Trouver deux vecteurs propres de A non colinéaires, associés à des valeurs propres non nulles.
3. Montrer que A est diagonalisable.

Réponse de l'exercice

1. La matrice A est clairement de rang 2, et donc $0 \in \text{Spec}(A)$, et par théorème du rang, la dimension de $E_0(A) = \ker(A)$ est $2n-2$.
2. On a les vecteurs propres $X = (1)$ et $Y = ((-1)^{i+1})$, associés respectivement à $n(a+b)$ et $n(a-b)$.
3. La matrice est donc diagonalisable.

Exercice 9

1. Montrer que tout polynôme 1-périodique est constant.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X+2)P(X) - XP(X+1) \end{array}$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme.
   b) Soit $P \in \ker(\varphi)$. En calculant $P(0)$ et $P(-1)$, déterminer $\ker(\varphi)$.
   c) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   d) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de φ.

   Indication : on pourra considérer les polynômes $P_k = \prod_{i=0}^{k} (X+i)$.

Réponse de l'exercice

1. Soit donc P un polynôme 1-périodique : on a donc $P(X) = P(X+1)$. Soit alors Q le polynôme $P - P(0)$. On a alors $Q(0) = 0$, puis par une récurrence immédiate, $Q(n) = 0$ pour tout entier n.
   Le polynôme Q a donc une infinité de racines, et donc est nul : on a donc $P = P(0)$ qui est bien constant.
2. a) Il suffit de le vérifier.
   b) Soit donc $P \in \ker(\varphi)$; on a donc $(X+2)P(X) = XP(X+1)$.
   En évaluant en 0, on obtient donc $2P(0) = 0$, et donc $P(0) = 0$: il existe un polynôme Q tel que $P = XQ$. On peut alors réécrire
   $$(X+2)XQ(X) = X(X+1)Q(X+1).$$
   En évaluant en -1, on obtient alors $-Q(-1) = 0$, et donc $Q(-1) = P(-1) = 0$.
   Il existe alors un polynôme R tel que $P = X(X+1)R$. Réécrivons :
   $$(X+2)X(X+1)R(X) = X(X+1)(X+2)R(X+1),$$
   et donc $R(X) = R(X+1)$.
   D'après la question 1, R est donc un polynôme constant, et on en déduit
   $$\ker(\varphi) = \text{Vect}(X(X+1)).$$

c) On calcule pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\varphi(X^k) = (2-k)X^k - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i-1} X^i.$$

On a donc la matrice suivante :

$$\operatorname{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -\binom{n-1}{0} & -\binom{n}{0} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\binom{n-1}{1} & -\binom{n}{1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (2-(n-1)) & -\binom{n}{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2-n) \end{pmatrix}.$$

d) La matrice de φ est donc triangulaire supérieure ; on a directement

$$\operatorname{Spec}(\varphi) = [\![2-n, 2]\!],$$

chaque sous-espace propre étant de dimension inférieure ou égale à 1, et donc égale à 1. On a déjà vu que $1 \in E_2(\varphi)$, $X \in \mathbb{E}_1(\varphi)$ et $\ker(\varphi) = \operatorname{Vect}(X(X+1))$, et donc

$$E_2(\varphi) = \operatorname{Vect}(1),\ E_1(\varphi) = \operatorname{Vect}(X) \quad \text{et} \quad E_0(\varphi) = \operatorname{Vect}(X(X+1)).$$

Calculons alors à l'aide de l'indication, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= (X+2)P_k - X\prod_{i=0}^{k}(X+i+1) \\ &= 2P_k + XP_k - X\prod_{i=1}^{k+1}(X+i) \\ &= 2P_k + X\prod_{i=1}^{k}(X+i)\,(X-(X+k+1)) \\ &= (1-k)P_k \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc

$$E_{1-k}(\varphi) = \operatorname{Vect}(P_k).$$

Exercice 10

(i) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v, *i.e.*

$$\forall \lambda \in \operatorname{Spec}(u),\ \forall x \in E_\lambda(u),\ v(x) \in E_\lambda(u).$$

(ii) En déduire que si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors u et v ont un vecteur propre commun.

Réponse de l'exercice

1. Soit donc λ une valeur propre de u, et soit $x \in E_\lambda(u)$. On a donc $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$\begin{array}{c} v(u(x)) = \lambda v(x) \\ \shortparallel \\ u(v(x)) \end{array}$$

Ainsi, on a bien $v(x) \in E_\lambda(u)$.

2. Soit alors λ une valeur propre de u (qui existe dans le cas complexe). Soit alors l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ défini par $\varphi(x) = v(x)$. Il admet une valeur propre, et donc il existe μ et $x \in E_\lambda(u)$ non nul tels que $\varphi(x) = \mu x$.

Or $\varphi(x) = g(x) = \mu x$, et donc x est un vecteur propre commun à u et v.

Exercice 11

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Pour une telle suite, on pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

   En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leurs sous-espaces propres associés.

   b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. a) Calculer P^{-1}.

   b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

Réponse de l'exercice

1. On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 3u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

On a donc, par une récurrence immédiate, pour tout n

$$X_n = M^n X_0.$$

2. a) On trouve deux valeurs propres pour M :Spec$(M) = \{-2, 1\}$. Les espaces $E_{-2}(M)$ et $E_1(M)$ sont respectivement engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Les deux sous-espaces propres sont de dimension 1, et donc la matrice M n'est pas diagonalisable.

3. a) D'après la question précédente, on peut choisir $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Posons alors $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On doit alors avoir $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$, et donc

$$y = 1,\ z = 1 + y \quad \text{et} \quad -2 + 3y = 1 + z.$$

   On trouve alors $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   On vérifie facilement que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) En calculant les premières puissances de T, on voit que

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   qu'on montre facilement par récurrence.

4. Par changement de base, on a donc $M = PTP^{-1}$, puis par une rapide récurrence, $M^n = PT^nP^{-1}$.

5. a) On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) En calculant le produit, la première ligne de M vaut

$$\frac{1}{9} \Big((-2)^n + 8 - 6n \quad (-2)^{n+1} + 2 + 3n \quad (-2)^n - 1 + 8n \Big).$$

   On trouve alors pour tout n

$$u_n = \frac{1}{9} \Big(((-2)^n - 6n + 8)\, u_0 + \Big((-2)^{n+1} + 3n + 2 \Big) u_1 + ((-2)^n + 3n - 1)\, u_2 \Big).$$

Exercice 12

*On pourra utiliser pour les programmes **Python** la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy` qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.*

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
import numpy as np
V = np.array( [ [1,2,1], [2,3,2] ] )
print(np.linalg.matrix_rank(V) )

```

Python renvoie alors la valeur : 2.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A.

1. a) Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
   On pourra représenter les vecteurs par des listes.
   b) Écrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de A.
2. a) Vérifier que les vecteurs $(1,-2,0)$, $(0,1,-1)$ et $(1,0,-1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.
   b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. a) Écrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
   b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).
4. Soit N un entier naturel non nul, une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N;N]\!]^3$.

   a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteurs propre de A parmi ces N vecteurs ?
   b) Quelle est la limite de $N\ln\left(1-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$?
   En déduire la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

Réponse de l'exercice

1. On propose le code

```python
import numpy as np

A = np.array([[-4,-3,-3],[0,2,0],[6,3,5]])

def colineaires(U,V):
mat = np.array([U,V])
return np.linalg.matrix_rank(mat) < 2

def vecteur_propre(U):
if U==[0,0,0]:
return False
else:
return colineaires(U,np.dot(A,U))

```

2. a) Il suffit de le vérifier. On trouve les valeurs propres, dans l'ordre, 2, 2 et -1.

   b) Les deux premiers vecteurs forment une famille libre, donc $E_2(f)$ est de dimension au moins 2. De plus, $E_{-1}(f)$ est de dimension au moins 1, et donc f est diagonalisable.

3. a) On propose le code :

```python
def compteVP(N):
cmpt = 0
for x in range(-N,N+1):
for y in range(-N,N+1):
for z in range(-N,N+1):
if vecteur_propre([x,y,z]):
cmpt = cmpt + 1
return cmpt

```

   On trouve alors 240 vecteurs propres pour $N = 10$.

   b) Cherchons le nombre de vecteurs propres associés à -1 : ils sont tous de la forme $(x, 0, -x)$, et pour que toutes les coordonnées soient dans $[\![-N, N]\!]$, il faut et il suffit que x soit dans cet intervalle, privé de 0.

   Il y a donc $2N$ tels vecteurs.

   Cherchons maintenant le nombre de vecteurs propres associés à 2 : ils sont tous de la forme $(x, -2x + y, y)$. On doit alors avoir $x, y, y - 2x \in [\![-N, N]\!]$.

   On doit donc avoir $y \in [\![-N + 2x, N + 2x]\!] \cap [\![-N, N]\!]$. On considère deux cas :

   - si $x \in [\![-N, 0]\!]$, alors on doit avoir $y \in [\![-N, N + 2x]\!]$, ce qui donne $2N + 2x + 1$ possibilités
   - si $x \in [\![1, N]\!]$, alors on doit avoir $y \in [\![-N + 2x, N]\!]$, ce qui donne $2N - 2x + 1$ possibilités

   Finalement, le nombre de vecteurs propres associés à 2 (en enlevant le vecteur nul) est

$$\begin{aligned}\left(\sum_{x=-N}^{0} 2N + 2x + 1\right) + \left(\sum_{x=1}^{N} 2N - 2x + 1\right) - 1 &= \sum_{x=0}^{N} 2N - 2x + 1 + \sum_{x=1}^{N} 2N - 2x + 1 - 1 \\ &= 2N(N+1) - N(N+1) + N + 1 + 2N^2 - N(N+1) + N - 1 \\ &= 2N^2 + 2N\end{aligned}$$

   Au total, on a donc $2N^2 + 4N$ vecteurs propres dont les coefficients sont entiers entre $-N$ et N.

4. a) Chaque vecteur a une probabilité $\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}$ d'être vecteur propre de A, et par indépendance, on a donc

$$p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right).$$

b) On a

$$\begin{aligned} N \ln\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) &\sim -N\frac{2N(N+2)}{(2n+1)^3} \\ &\sim -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

On a alors

$$p_N \to 1 - e^{-\frac{1}{4}}.$$

Exercice 13

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python.
La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur R vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

Réponse de l'exercice

1. a) Il suffit d'échelonner $A - \lambda I_3$ pour trouver le spectre de A, ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

   L'endomorphisme n'est pas diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres étant 2.

   b) On montre facilement la liberté, et comme elle est composée de trois vecteurs, la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a alors $\varphi(a_1) = 3a_1$, $\varphi(a_2) = a_1 + 3a_2$ et $\varphi(a_3) = a_3$, d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Par formule de changements de base, on obtient donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On trouve l'inverse avec Python :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre et homogène, et on a donc directement la solution

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = e^{3t}.$$

   b) On note d'abord que $X'(t) = AX(t)$, et donc

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$

   La première ligne du système donne donc bien le bon résultat.

   c) On note que $u(t) = \frac{1}{2}(f(t) + g(t))$, et donc $u(0) = 1$.

   On trouve alors pour tout t : $u(t) = e^{3t}(t+1)$.

   d) On a pour tout t :

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = PY(t) = \begin{pmatrix} u(t) + w(t) \\ u(t) - w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

   De même qu'en 2c, on trouve $w'(t) = w(t)$, avec $w(0) = \frac{1}{2}(f(0) - g(0)) = 0$. Ainsi, on a $w = 0$, puis $f(t) = g(t) = u(t)$.