12 Réduction des endomorphismes

12.1 Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme

Dans toute cette section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 12.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de f si
$$\exists x \in E \backslash \{0\},\ f(x) = \lambda x.$$
- On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ si $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.
- On notera $E_\lambda(f)$ l'ensemble
$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda(x)\} = \ker(f - \lambda \mathrm{id}),$$
appelé *sous-espace propre de f associé à λ*.

On note alors $\mathrm{Spec}(f)$, appelé *spectre de f* l'ensemble des valeurs propres de f.

Notae : On note donc que $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, auxquels on ajoute 0.

On note de plus que si λ n'est pas valeur propre de f, alors $E_\lambda(f) = \{0\}$.

On définit de la même façon les éléments propres d'une matrice :

Définition 12.2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de A si

$$\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\{0\},\ AX = \lambda X.$$

- On dit que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *colonne propre* de A associé à la valeur propre λ si $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$
- On notera $E_\lambda(A)$ le *sous-espace propre* de A associé à λ :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

On note alors $\mathrm{Spec}(A)$, appelé *spectre de A* l'ensemble des valeurs propres de A.

On a alors le théorème attendu :

Proposition 12.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de f dans une base de E. Alors :

- $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$
- $x \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow \mathrm{mat}(x) \in E_\lambda(A)$

Autrement dit, chercher les éléments propres de f revient exactement à trouver les éléments propre de n'importe quelle matrice représentant f.

Corollaire 12.4

Deux matrices semblables ont exactement le même spectre, et leurs sous-espaces propres sont de même dimension.

NOTA : Ceci nous donne une caractérisation de plus pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, comme on l'avait vu pour la trace et le rang.

Proposition 12.5 – Structure des sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus,

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow \dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, alors il existe x non nul dans $E_\lambda(f)$, qui est donc non réduit à $\{0\}$. Réciproquement, si $\lambda \notin \mathrm{Spec}(f)$, alors le seul élément tel que $f(x) = \lambda x$ est 0. □

Méthode de recherche des valeurs propres

En pratique, on utilisera la proposition suivante pour trouver des valeurs propres :

Proposition 12.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base. Alors sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de f

(ii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

(iii) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$

Méthode

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme, on fera donc dans l'ordre :

- Écrire la matrice A de f dans une base
- Pour un λ quelconque, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_n$ avec la méthode de Gauss. *Attention : il faudra souvent distinguer certaines valeurs de λ.*
- Regarder pour quelles valeurs de λ ce rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace.

NOTA : Dans la méthode du pivot, on essayera tant que possible d'échanger des lignes pour éviter les λ sur la diagonale, sauf tout en bas à droite. Si c'est impossible, il faudra alors distinguer des valeurs de λ.

EXERCICE : Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + z, x + y + z, x + z).$$

On note qu'avec cette méthode, on trouve directement (en utilisant le théorème du rang) la dimension des sous-espaces propres : il suffit de remplacer λ par les valeurs trouvées, et d'utiliser la forme échelonnée pour trouver le rang de $A - \lambda I_n$.

Cas particuliers Dans certains cas, il est plus simple de trouver les valeurs propres.

Pour une matrice 2×2, on pourra utiliser le directement la proposition suivante :

Proposition 12.7

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Démonstration. On sait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant de $A - \lambda I_2$ vaut

$$\det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

□

EXERCICE : Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Pour une matrice triangulaire, on a

Proposition 12.8

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est *inférieure ou égale* au nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale.

Démonstration. On sait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls . Il suffit donc d'écrire $A - \lambda I_n$ pour se convaincre du résultat.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ et que λ apparaît k fois sur la diagonale, alors $A - \lambda I_n$ possède exactement $n - k$ coefficients diagonaux non nuls . On a donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - k$, et on en déduit

$$\dim(E_\lambda(A)) \leqslant n - (n - k) = k.$$

□

Pour les matrice diagonales, le résultat reste le même, avec une amélioration pour les dimensions des sous-espaces propres.

Corollaire 12.9

Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale.

12.2 Somme de sous-espaces propres

Définition 12.10

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe* si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 0 \Rightarrow \forall k,\ x_k = 0.$$

On note alors la somme $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

C'est équivalent à dire que concaténer des bases des F_i donne une base de la somme.

Théorème 12.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes deux à deux de f. Alors la somme de sous-espaces propres $\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)$ est une somme directe.

Démonstration. Soient donc pour tout i $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = 0$.

Soit P_i un polynôme† tel que $P_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On a alors

$$\begin{aligned} P_i(f)(x_1 + \cdots + x_p) &= P_i(f)(x_1) + \cdots + P_i(f)(x_p) \\ &= P_i(\lambda_1)x_1 + \cdots + P_i(\lambda_p)x_p \\ &= x_i \end{aligned}$$

Comme la somme $x_1 + \cdots x_p$ est nulle, on en déduit $x_i = 0$. □

La somme étant directe, en concaténant des bases de chacun des sous-espaces propres, on obtient une base de la somme. Ainsi :

*. Cette notion est hors-programme en BCPST
†. donné par le théorème d'interpolation de Lagrange

Corollaire 12.12

La dimension de la somme des sous-espaces propres de f est la somme des dimensions des sous-espaces propres :

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)).$$

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Ainsi, chaque sous-espace propre étant de dimension au moins 1, on peut majorer le nombre de valeurs propres :

Corollaire 12.13

Un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède au plus n valeurs propres.

Corollaire 12.14

Si un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres distinctes, alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.

12.3 Diagonalisation

Le but de la recherche de valeurs propres et sous-espaces propres est de pouvoir trouver des bases dans lesquelles les matrices sont simples, et au mieux diagonales.

Définition 12.15

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est *diagonalisable* s'il existe des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

12.3.1 Base de vecteurs propres

Commençons par remarquer que si on a une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors les e_i sont nécessairement des vecteurs propres de f.

Réciproquement :

Proposition 12.16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors si $x_i \in E_{\lambda_i}(f) \backslash \{0\}$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre de E.

Démonstration. Soient donc $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus E_{\lambda_k}(f)$ est directe, et que $\mu_i x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, chaque $\mu_i x_i$ est nul.

Comme on a choisi des vecteurs propres, donc non nuls, on obtient bien $\mu_i = 0$. □

Ceci nous donne un premier critère de diagonalisabilité :

Proposition 12.17

Si un endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Plus précisément, une base dans laquelle la matrice de f est diagonale est constituée de vecteurs propres pour chaque valeur propre.

Démonstration. On a donc, d'après le résultat précédent, une famille libre de n vecteurs propres, et donc une base de E. □

Plus généralement on utilisera le théorème suivant :

Théorème 12.18

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$

(iii) E est somme directe des sous-espaces propres de f

(iv) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de E.

Démonstration. On va faire une preuve cyclique.

- *(i) ⇒ (ii)* : Soit donc $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

  Alors les valeurs propres de f sont exactement les coefficients diagonaux de D , et la dimension de $E_\lambda(f)$ est exactement le nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de D.

Comme D a n coefficients diagonaux, on en tire donc $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$

- *(ii) ⇒ (iii) :* On sait déjà que la somme des sous-espaces propres de f est directe, et que

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n.$$

  Cette somme directe est donc de même dimension que E, et donc égale à E.

- *(iii) ⇒ (iv) :* Soient $\mathcal{B}_\lambda$ des bases de tous les $E_\lambda(f)$. Alors, comme la somme est directe, la concaténation de toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ donne une base de la somme, et donc une base de E.

- *(iv) ⇒ (i) :* Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de vecteurs propres : $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  et donc f est diagonalisable.

□

Méthode

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on veut, si possible, diagonaliser. Les étapes à suivre sont donc :

- Déterminer les valeurs propres de A.
- Chercher la dimension de chacun des sous-espaces propres.
- Si la somme des dimensions vaut n, alors la matrice est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.

On se place dans le cas où la matrice est diagonalisable.

- On cherche une base de chacun des sous-espace propres.
- On concatène toutes ces bases pour en former une de E, notée $\mathcal{B}$. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$, on a bien
$$A = PDP^{-1}$$
  où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

EXEMPLE : On veut étudier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On cherche les valeurs propres de A. On échelonne donc la matrice $A - \lambda I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (2-\lambda)L_1]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & -5+2\lambda & (2-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix}$$

On traite le cas $\lambda \neq 2$.

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3 - (-5+2\lambda)L_2]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)^2(4-\lambda) - (-5+2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda^2-4x+3) \end{pmatrix}$$

Finalement, cette matrice est de rang strictement inférieur à 3 quand le coefficient en bas à droite est nul, *i.e.* si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. Dans ces cas, la matrice est de rang 2, et donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Si $\lambda = 2$, alors on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2.

Finalement, on a

$$\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}.$$

On est dans le cas où A a trois valeurs propres distinctes en dimension 3, et donc A est diagonalisable.

- On cherche donc une base de chacun des sous-espaces propres, qui sont tous de dimension 1 : il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.
  - $\lambda = 1$: on a déjà échelonné la matrice $A - 1I_3$. Le système à résoudre est donc
  $$\begin{cases} -x - 2y + 3z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$
  On trouve alors par exemple $(x, y, z) = (1, 1, 1) = e_1$.
  - $\lambda = 2$: le système à résoudre est
  $$\begin{cases} -x - 2y + 2z &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases}$$
  On trouve par exemple $(x, y, z) = (2, 0, 1) = e_2$.
  - $\lambda = 3$: le système à résoudre est
  $$\begin{cases} -x - 2y + z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases}$$
  On trouve par exemple $(x, y, z) = (-1, 1, 1) = e_3$.
- La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et en posant
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
on a la relation
$$A = PDP^{-1}.$$

On donne le théorème suivant, qu'on détaillera dans un autre chapitre :

Théorème 12.19 – spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable.

12.4 Applications de la diagonalisation

On a déjà vu dans les chapitres précédent à quoi servait une matrice simple :

12.4.1 Calcul de puissances et d'inverses

On a le résultat suivant, à redémontrer à chaque fois :

Proposition 12.20

Si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible, alors pour tout entier n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Si A est inversible, alors D aussi, et

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Si D est simple, par exemple diagonale, il est simple de calculer sa puissance n-ième. On ramène donc un calcul de puissance à seulement deux produits matriciels.

12.4.2 Étude de suites récurrentes linéaires

On considère une suite récurrente définie par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} &= du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} &= gu_n + hv_n + iw_n \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$. Alors, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a la relation

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On a alors, par une récurrence immédiate

Proposition 12.21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

Nota : C'est en particulier utile pour les suites définies par récurrence à plusieurs termes, par exemple

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On applique alors la méthode précédente en posant $v_n = u_{n+1}$, pour obtenir

$$\begin{cases} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= bu_n + av_n \end{cases}$$

et donc en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on obtient, en posant $X_n = \binom{u_n}{v_n}$ pour tout n,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

12.4.3 Similitude de matrices

On a vu que deux matrices semblables ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension, mais que la réciproque était fausse.

En revanche, si les matrices sont diagonalisables, alors

Proposition 12.22

Si A et B sont diagonalisables, alors A et B sont semblables si et seulement si elles ont même spectre et des sous-espaces propres de mêmes dimensions.

Démonstration. On a déjà vu le sens direct.

Pour le sens réciproque, si elles sont diagonalisables, elles seront toutes les deux semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité de la similitude, A et B seront bien semblables. $\square$

12.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Réponse de l'exercice

1. $\mathrm{Spec} = \{1\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((2,1))$.
2. $\mathrm{Spec} = \{1,3\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((2,1))$ et $E_3 = \mathrm{Vect}((3,2))$.
3. $\mathrm{Spec} = \{1,4,6\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,0))$, $E_4 = \mathrm{Vect}((2,3,0))$ et $E_6 = \mathrm{Vect}((16,25,10))$.
4. $\mathrm{Spec} = \{-2,2\}$, $E_{-2} = \mathrm{Vect}((0,-1,1),(1,0,0))$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((1,4,0))$.
5. $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} = \{2\}$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} = \{2, 2+i\sqrt{6}, 2-i\sqrt{6}\}$, $E_2 = \mathrm{Vect}((3,2,0))$, $E_{2+i\sqrt{6}} = \mathrm{Vect}((2, 1+i\frac{\sqrt{6}}{3}, 1))$ et $E_{2-i\sqrt{6}} = \mathrm{Vect}((2, 1-i\frac{\sqrt{6}}{3}, 1))$.
6. $\mathrm{Spec} = \{2,3,4\}$, $E_2 = \mathrm{Vect}((1,0,1))$, $E_3 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $E_4 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$.

Exercice 2

Pour les matrices de l'exercice précédent, dire si elles sont diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, et le cas échéant, expliciter la matrice diagonale et la matrice de passage.

Réponse de l'exercice

1. Pas diagonalisable
2. Diagonalisable
3. Diagonalisable
4. Diagonalisable
5. Pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$
6. Diagonalisable

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre soit diagonalisable.

Réponse de l'exercice

Soit f un tel endomorphisme. Soit alors $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, tous associés à la valeur propre λ.

Alors pour tout veteur x, on a $f(x) = \lambda x$, et f est donc une homothétie.

Réciproquement, les homothéties vérifient bien cette propriété.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. On suppose que $f \circ f = f$ (on dit alors que f est un projecteur).

   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(f) = 0$.

   a) Montrer que si x est vecteur propre de f associé à une valeur propre λ et $p \in \mathbb{N}$, alors x est vecteur propre de f^p, et préciser la valeur propre associée.

   b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

Réponse de l'exercice

1. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. On a alors $f(f(x)) = f(x)$, et donc $\lambda^2 x = x$.
   Comme $x \neq 0$, on a alors $\lambda^2 = \lambda$, puis le résultat voulu.
2. a) On montre facilement par récurrence que $f^p(x) = \lambda^p x$.

   b) On a donc $P(f)(x) = P(\lambda)x = 0$, et donc $P(\lambda) = 0$.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 2$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que 0 est valeur propre de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

2. Trouver une valeur propre non nulle de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

3. Montrer que J est diagonalisable, et donner une matrice diagonale à laquelle J est semblable.

Réponse de l'exercice

1. On a directement $\text{rg}(J) = 1$, et donc par théorème du rang, $\dim \ker(J) = n - 1$. Ainsi, 0 est bien valeur propre de J, et son sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

2. On note que $JU = nU$ où U est la matrice colonne ne contenant que des 1, et donc n est valeur propre de J.

   La somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvant excéder n, on a nécessairement un sous-espace propre associé de dimension 1.

3. Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de J est égale à n, et donc J est diaonalisable, semblable à $\operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \subseteq \operatorname{Im}(f).$$

Réponse de l'exercice

Soit donc x un vecteur propre associé à λ. On a donc $f(x) = \lambda x$, et donc $f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = x$. On a bien $x \in \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 7

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B, vues comme matrices réelles, ont même rang, même trace et même spectre.

Qu'en est-il si on les voit comme matrices complexes ?

A et B sont-elles semblables ?

Réponse de l'exercice

Le deux matrices ont même rang (2), même trace (0). Les valeurs propres de A sont les racines de

$$X^2 + 1 = 0,$$

et celles de B les racines de

$$X^2 + 4 = 0.$$

Elles ont donc même spectre ($\emptyset$).

En revanche, leurs spectres complexes sont différents ($\{i, -i\}$ pour A, et $\{2i, -2i\}$ pour B).

Les deux matrices ne sont donc pas semblables.

Exercice 8

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P - (X+1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que f est diagonalisable.

Réponse de l'exercice

1. Il suffit de le vérifier.

2. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$f(X^k) = X^k - (X+1)kX^{k-1} = (1-k)X^k - kX^{k-1} \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

La matrice de f dans la base canonique est donc triangulaire supérieure, de diagonale $1, 0, -1, -2, \dots, (1-n)$. Elle admet donc $n+1$ valeurs propres en dimension $n+1$, et donc est diagonalisable.

Exercice 9

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, B diagonalisable. Montrer que si A et B^3 commutent, alors A et B aussi.

Réponse de l'exercice

Soient D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PDP^{-1}$. Soit alors $M = P^{-1}AP$. Comme A et B commutent, on a $AB^3 = B^3A$, et donc $PMD^3P^{-1} = PD^3MP^{-1}$, donc M et D^3 commutent.

On a alors pour tous i et j

$$\begin{aligned}
(MD^3)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj}^3 \\
&= m_{ij} d_{jj}^3 \\
(D^3M)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} d_{ik}^3 m_{kj} \\
&= d_{ii}^3 m_{ij}
\end{aligned}$$

La fonction cube étant bijective, on a donc $m_{ij} = 0$ ou $d_{ii} = d_{jj}$, ce qui prouve la commutation de D et M, puis celle de A et B.

Exercice 10

(i) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v, *i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(u),\ \forall x \in E_\lambda(u),\ v(x) \in E_\lambda(u).$$

(ii) En déduire que si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors u et v ont un vecteur propre commun.

Réponse de l'exercice

1. Soit donc λ une valeur propre de u, et soit $x \in E_\lambda(u)$. On a donc $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$\begin{array}{c} v(u(x)) = \lambda v(x) \\ \shortparallel \\ u(v(x)) \end{array}$$

Ainsi, on a bien $v(x) \in E_\lambda(u)$.

2. Soit alors λ une valeur propre de u (qui existe dans le cas complexe). Soit alors l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ défini par $\varphi(x) = v(x)$. Il admet une valeur propre, et donc il existe μ et $x \in E_\lambda(u)$ non nul tels que $\varphi(x) = \mu x$.

   Or $\varphi(x) = g(x) = \mu x$, et donc x est un vecteur propre commun à u et v.

Exercice 11 Racine carrée de la dérivation

Soit D l'endomorphisme sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$. On suppose qu'on peut trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ Δ tel que $D = \Delta^2$.

1. Montrer que D et Δ commutent.
2. Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par Δ et par D.
3. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ de l'endomorphisme induit par D.
4. Conclure que l'existence de Δ est impossible.

Réponse de l'exercice

1. On a directement $D\Delta = \Delta^3 = \Delta D$.
2. Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$. On a alors $D(P) = a \in \mathbb{R}_1[X]$, donc $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par D.

   On a de plus
   $$\begin{aligned}(\Delta(P))' &= D(\Delta(P)) \\ &= \Delta(D(P)) \\ &= a\Delta(1)\end{aligned}$$
   De même, $(\Delta(1))' = \Delta(0) = 0$, et donc $\Delta(1)$ est constant.

   Finalement, Δ laisse bien $\mathbb{R}_1[X]$ stable.
3. La matrice de D est facile :
   $$A = \mathrm{mat}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Pour celle de Δ, on a vu qu'elle est de la forme
   $$B = \mathrm{mat}(\Delta) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
   On a de plus $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ba + cb \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$, et donc comme $B^2 = A$, on a $a = c = 0$ et donc $b = 0$, et on a alors $\Delta = 0$, ce qui est impossible.

Exercice 12

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n, simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.
3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

   Soit φ l'application définie sur E par :

   $$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

   a) Montrer que φ est un endomorphisme de E, justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

   b) Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.
   Démontrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $\varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k$.

   c) En déduire que l'endomorphisme est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
4. On pose : $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.

   a) Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.
5. À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$. Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?
6. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Réponse de l'exercice

1.
```
import random as rd

def exo1(n):
X = rd.randint(0,3)
A = list(range(1,X+1))
B = list(range(X+1,4))
for _ in range(n):
```

```
k = rd.randint(1,3)
if k in A:
A.remove(k)
B.append(k)
else:
B.remove(k)
A.append(k)
return len(A)
```

2. La loi de X_0 étant uniforme sur $[\![0,3]\!]$, chaque $\mathbb{P}(X_0 = i)$ pour $i \in [\![0,3]\!]$ est $\frac{1}{4}$. Donc $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

   Calculons ensuite : soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \in [\![0,3]\!]$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = i).$$

   Ensuite il faut remarquer que :

   - pour avoir $X_{n+1} = 0$, nécessairement on avait $X_n = 1$, et c'est la boule qui était dans A qui a été choisie, avec donc probabilité $\frac{1}{3}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

   - pour avoir $X_{n+1} = 1$, deux choix sont possibles : on avait $X_n = 2$, et on a enlevé une bouel de A (probabilité $\frac{2}{3}$), ou il n'y avait aucune boule dans A, et on en rajoute alors une avec probabilité 1 ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 2).$$

   - Pour avoir $X_{n+1} = 2$, deux choix sont possibles : on avait trois boules dans A, et on en retire une avec probabilité 1, ou on en avait une, et on en rajoute une autre (probabilité $\frac{2}{3}$) ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

   - Enfin, pour avoir $X_{n+1} = 3$, il y avait nécessairement deux boules dans A, et on choisit le numéro de la boule dans B (probabilité $\frac{1}{3}$) ; d'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2).$$

3. a) Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation, on a bien

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= X(P(X) + \lambda Q(X)) + \frac{1}{3}(1 - X^2)(P'(X) + \lambda Q'(X)) \\ &= \varphi(P) + \lambda Q(X) \end{aligned}$$

   L'application φ est donc linéaire.

   On note ensuite que

   - $\varphi(1) = X$
   - $\varphi(X) = X^2 + \frac{1}{3}(1 - X^2) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}X^2$
   - $\varphi(X^2) = X^3 + \frac{2}{3}(1 - X^2)X = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3$

- $\varphi(X^3) = X^4 + (1 - X^2)X^2 = X^2$

En particulier, par linéarité, tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 aura une image de degré inférieur ou égal à 3. φ est donc un endomorphisme. De plus, les images des vecteurs de la base canonique donne bien la matrice M.

b) Commençons par calculer P_k' :

$$P_k'(X) = \frac{1}{8}\left(k(X-1)^{k-1}(X+1)^{3-k} + (3-k)(X-1)^k(X+1)^{3-k-1}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= XP_k(X) + \frac{1}{3}(1-X)(1+X)P_k' \\
&= XP_k(X) - \frac{1}{3}\left(k\frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}(X+1) + \frac{1}{8}(3-k)(X-1)(X-1)^k(X+1)^{3-k}\right) \\
&= XP_k(X) - \frac{1}{3}\left(k(X+1)P_k(X) + (3-k)(X-1)P_k(X)\right) \\
&= P_k(X)\left(X - \frac{k}{3}(X+1) - \frac{3-k}{3}(X-1)\right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}k\right)P_k(X)
\end{aligned}$$

c) P_0, P_1, P_2 et P_3 étant non nuls, ils sont donc vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres respectives 1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ et -1. L'endomorphisme φ admet donc 4 valeurs propres distinctes, et est donc diagonalisable, E étant de dimension 4.

4. a) Dans la base $\mathcal{B}$, Q a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. On retrouve alors le vecteur U_0.

b) Montrons-le par récurrence sur n :

- On a bien

$$\begin{aligned}
P_0 + P_2 &= \frac{1}{8}(X+1)^3 + \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1) \\
&= \frac{1}{8}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + \frac{1}{8}(X^3 - X^2 - X + 1) \\
&= \frac{1}{8}(2X^3 + 2X^2 + 2X + 2) \\
&= Q \\
&= \varphi^0(Q)
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons l'égalité vraie pour ce rang. Alors

$$\varphi^{n+1}(Q) = \varphi\left(P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2\right) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} P_2$$

par linéarité, et P_0 et P_2 étant vecteurs propres de φ.

5. Une rapide récurrence à partir de la question 2 permet de montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0,$$

et donc en repassant aux endomorphismes, pour tout n, U_n a les mêmes coordonnées que $\varphi^n(X)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Commençons par calculer :

$$\begin{aligned}
P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2 &= \frac{1}{8}(X+1)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1)\\
&= \frac{1}{8}\left(X^3+3X^2+3X+1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n X^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n X^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n X + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)X^3 + \left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)X^2 + \left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)X + \left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(X_n=0) = \frac{1}{8}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right),\ \mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{8}\left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right),$$
$$\mathbb{P}(X_n=2) = \frac{1}{8}\left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right),\ \mathbb{P}(X_n=3) = \frac{1}{8}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Pour des grandes valeurs de n, on pourrait alors négliger le terme $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et simuler X_n par une variable de loi $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

6. On propose le code

```
def simulexo1(n,N):
simul = [0,0,0,0]
for i in range(N):
k = exo1(n)
simul[k] += 1/N
return simul
```

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes réels u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}\left(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}\right).$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudie le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.

2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe λ, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation : $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, tels que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix} P^{-1}$.

5. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n, et en déduire une expression en fonction de n, A et X_0.

6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes a, b et c (que l'on ne demande pas d'expliciter) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + bz^n + c\bar{z}^n.$$

7. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |bz^n + c\bar{z}^n| = 0$.

   Que peut-on dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Re(bz^n + c\bar{z}^n)$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Im(bz^n + c\bar{z}^n)$?

8. En déduire que $a \in \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Réponse de l'exercice

1. On propose le code suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as rd

def suite_u(a,b,c):
u = [a,b,c]
for _ in range(97):
u.append((1/3)*(u[-1] + u[-2] + u[-3]))
return u

def plot_u():
"""
On teste 10 suites dont les premiers termes sont choisis aléatoirement
"""
abs = list(range(100))
for _ in range(10):
a = rd.randint(-10,10)
b = rd.randint(-10,10)
c = rd.randint(-10,10)
ord = suite_u(a,b,c)
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

   On constate que dans tous les cas, les suites semblent être convergentes.

2. Quitte à échanger des lignes (on peut les prendre dans l'ordre L_3, L_1 puis L_2), on note que la matrice A est échelonnée, et de rang 3.

   Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On échelonne la matrice $A - \lambda I_3$:

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_1 \leftrightarrow 3L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 +\ \lambda L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & \lambda - 3\lambda^2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \lambda L_3 +\ (1+\lambda) L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

la dernière étape étant valide car $\lambda \neq 0$.

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si le coefficient en bas à droite est nul, c'est-à-dire si et seulement si λ est racine de $Q = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$.

4. On note que 1 est racine évidente de Q, et on peut factoriser

$$Q = \frac{1}{3}(X-1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Le discriminant de $3X^2 + 2X + 1$ vaut -8, et donc Q admet deux racines complexes conjuguées

$$z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}i \text{ et } \overline{z} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}i.$$

On note que le module de z et $\overline{z}$ vaut $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$.

Ainsi, la matrice A possède trois valeurs propres distinctes (dans $\mathbb{C}$) : 1, z et $\overline{z}$.

Elle est donc diagonalisable : il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix} P^{-1} = PDP{-}1.$$

5. On note directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, et une récurrence immédiate nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0.$$

6. Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier n, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. Notons α, β et γ les coefficients de la premier ligne de P, et λ, μ et ν les coefficients de $P^{-1}X_0$. On a alors

$$X_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta z^n & \gamma \overline{z}^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\mu z^n + \gamma\nu\overline{x}^n \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

On retrouve bien la forme voulue pour u_n.

7. On a pour tout n, par inégalité triangulaire

$$|bz^n + c\overline{x}^n| \leqslant (|b| + |c|)\,|z|^n.$$

Comme le module de z est strictement plus petit que 1, par théorème d'encadement des limites, on a bien

$$\lim_{n\to\infty} |bz^n + c\overline{z}^n| = 0.$$

Ainsi, nécessairement, les parties réelles et imaginaires de cette quantité tendent aussi vers 0.

8. On a donc pour tout n
$$\lim \Re(u_n - a) = 0 \text{ et } \lim \Im(u_n - a) = 0.$$
Par linéarité, on a donc
$$\lim \Re(u_n) = \Re(a) \text{ et } \lim \Im(u_n) = \Im(a).$$
Or une récurrence immédiate montre que la suite (u_n) est réelle, et donc sa partie imaginaire est nulle. Par unicité de la limite, on a donc $\Im(a) = 0$, puis $\Re(a) = a$.
On a donc bien $\lim u_n = a$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ D(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Déterminer $D(1)$ puis $D(X^k)$ pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$.
   c) Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   d) Déterminer le spectre de D. D est-il diagonalisable ?
2. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$.
   a) Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Calculer $D(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $D(H_k) = kH_{k-1}$.
   c) Déterminer la matrice représentative de D dans la base $\mathcal{B}$.
3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré. Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, le polynôme $P = 5X^3 - 2X + 3$ est représenté par la liste `[3,-2,0,5,0]`.
   a) Programmer une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un réel a, et qui renvoie alors la liste modélisant $(X-a)P$.
   b) Programmer une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste modélisant le polynôme H_n.
4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Montrer que $H_2(Y)$ admet une espérance, en déduire que $H_1(Y)$ et $H_0(Y)$ admettent une espérance.
   Déterminer alors $\mathbb{E}(H_0(Y))$, $\mathbb{E}(H_1(Y))$ et $\mathbb{E}(H_2(Y))$.
   b) Déterminer les coordonnées de 1, X et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2).
   c) Retrouver la valeur de la variance de Y.

5. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À tout élément $f \in E$, on associe la fonction $g = \tilde{D}(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \tilde{D}(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

   a) On dit qu'un réel λ est une **valeur propre de** $\tilde{D}$ s'il existe une fonction non nulle f de E telle que $\tilde{D}(f) = \lambda f$.
   En considérant les fonctions $h_a\colon x \mapsto e^{ax}$ et $k_a\colon x \mapsto \sin(\pi x)e^{ax}$ où a est un réel, déterminer les valeurs propres de $\tilde{D}$.
   b) Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, montrer que $g = \tilde{D}(F)$ est une densité de probabilité.
   c) Expliciter g si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Réponse de l'exercice

1. a) Soient donc $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} D(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda D(P) + D(Q) \end{aligned}$$

   L'application D est donc linéaire.
   Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $D(P)$ est clairement un polynôme, de degré inférieur ou égal à $\max(\deg(P(X+1)), \deg(P)) = n$.
   Finalement, D est bien un endomorphisme.

   b) On a $D(1) = 1 - 1 = 0$. Si $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} D(X^k) &= (X+1)^k - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \end{aligned}$$

   c) D'après la question précédente, on a donc

$$\operatorname{mat}(D) = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   d) La matrice de D étant triangulaire, on a donc $\operatorname{Spec}(D) = \{0\}$. L'application D étant clairement non nulle, on a $\operatorname{rg}(D) \geqslant 1$ et donc $\dim E_0(D) < n$.
   L'endomorphisme D n'est donc pas diagonalisable.

2. a) On commence par noter que $\deg(H_k) = k$. La famille $\mathcal{B}$ est donc échelonnée, et donc libre. Comme elle contient $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs, c'en est une base.

b) On a $D(H_0) = 0$. Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}
D(H_k) &= \prod_{i=0}^{k-1}(X-(i-1)) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\
&= \prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\
&= \prod_{i=0}^{k-2}(X-i)((X+1)-(X-k+1)) \\
&= kH_{k-1}
\end{aligned}$$

c) On en déduit alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On propose le code

```python
def f1(P,a):
    XP = [0]+P[:-1]
    aP = [a*c for c in P]
    return [XP[i]-aP[i] for i in range(len(P))]

def H(n):
    P = [1]+n*[0]
    for i in range(n):
        P = f1(P,i)
    return P

```

4. a) On a $H_2(Y) = Y(Y-1)$. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-2)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda^2
\end{aligned}$$

Ainsi, par théorème de transfert, $H_2(Y)$ admet une espérance, qui vaut λ^2.
De plus, $H_1(Y) = Y$ et $H_0(Y) = 1$, qui admettent donc tous les deux une espérance.
On a

$$\mathbb{E}(H_0(Y)) = 1,\ \mathbb{E}(H_1(Y) = \lambda) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(H_2(Y)) = \lambda^2.$$

b) On a $1 = H_0$, $X = H_1$ et $X^2 = H_2 + H_1$.

c) On a donc $Y^2 = H_2(Y) + H_1(Y)$, et donc

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(H_2(Y)) + \mathbb{E}(H_1(Y)) - \mathbb{E}(H_1(Y))^2 = \lambda.$$

5. a) On a pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(h_a)(x) &= e^{ax+a} - e^{ax} \\ &= e^{ax}(e^a - 1) \\ \tilde{D}(k_a)(x) &= \sin(\pi x + \pi)e^{ax+a} - \sin(\pi x)e^{ax} \\ &= -\sin(\pi x)e^{ax}(e^a + 1)\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions h_a et k_a étant non nulles, tous les réels de la forme $e^a - 1 \in]-1, +\infty[$ et $-e^a - 1 \in]-\infty, -1[$ sont valeurs propres de $\tilde{D}$.

Si -1 était valeur propre, on aurait une fonction non nulle f telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = 0$; c'est impossible, donc -1 n'est pas valeur propre.

Finalement, les valeurs propres de $\tilde{D}$ sont les réels de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) On note que F est bien dans $\mathcal{C}$. Soit $g = \tilde{D}(f)$.

- Comme F est croissante, g est positive.
- Comme F est continue, g aussi.
- Soient $\alpha < \omega \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\omega g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\omega F(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\omega F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha+1}^{\omega+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\omega F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\omega^{\omega+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^{\alpha+1} F(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par croissance de F et croissance de l'intégrale, on a alors

$$F(\omega) \leqslant \int_\omega^{\omega+1} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(\omega+1).$$

Par théorème d'encadrement des limites, cette intégrale converge donc vers 1 quand ω tend vers $+\infty$.
De même, l'intégrale $\int_\alpha^{\alpha+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers 0 quand α tend vers $-\infty$.
Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, vers 1.

Ainsi, g est bien une densité de probabilité.

c) Si F est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$, on a alors

$$\begin{gathered}\forall t < -1, g(t) = 0 \\ \forall t > 1, g(t) = 0 \\ \forall t \in [-1,0], g(t) = t+1 \\ \forall t \in [0,1], g(t) = 1-t\end{gathered}$$

Exercice non préparé

1. Écrire une fonction Python qui simule une série de N lancers d'une pièce équilibrée, et qui renvoie la liste des résultats de ces lancers ("Pile" est codé par 1, et "Face" par 0).
2. Écrire une fonction Python qui simule une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de la configuration "Pile, Pile, Face", et qui renvoie le nombre de lancers nécessaires à l'apparition de cette configuration. À l'aide de cette fonction, évaluer le temps moyen d'attente de cette configuration.

Corrigé

On propose le code :

```
import random as rd

def bernoulli():
    if rd.random()<.5:
        return 1
    else:
        return 0

def PileOuFace(N):
    return [bernoulli() for _ in range(N)]

def PPF():
    l = PileOuFace(3)
    n = 3
    while l != [1,1,0]:
        l.append(bernoulli())
        l.pop(0)
        n=n+1
    return n

def tempsPPF(N=10000):
    e = 0
    for _ in range(N):
        e = e + PPF()/N
    return e
```

On trouve un temps moyen de 8 lancers.