13 Couples de variables aléatoires

13.1 Séries doubles

On aura besoin dans la suite de séries doubles.

Définition 13.1

Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double de réels. On dit que cette suite double est *sommable* si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$ converge.

Dans ce cas, la somme de cette seconde série est appelée *somme de la série double* et est notée $\sum\limits_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p}$.

Dans certain cas particulier, on peut alors intervertir les sommes :

Théorème 13.2 – de Fubini

Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double de réels. On suppose que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $u_{n,p} \geqslant 0$. Alors cette suite double est sommable si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$ converge
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge et la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$ converge

Dans ce cas, on a alors

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

EXEMPLE : On veut montrer que la suite $(u_{i,j})_{i,j\geqslant 2}$ définie par $u_{i,j} = \frac{1}{i^j}$ est sommable.

- Soit $i \geqslant 2$. Alors la série $\sum \frac{1}{i^j}$ converge comme série géométrique, et on a

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{i^j} = \frac{1}{i(i-1)}.$$

- La série $\sum \frac{1}{i(i-1)}$ converge comme série téléscopique, et on a

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} = 1.$$

Finalement, la suite double est sommable, et

$$\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{i^j} = \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^j} = 1.$$

13.2 Généralités sur les couples de vecteurs aléatoires

Dans cette section, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on considère deux variables aléatoires X et Y. On veut savoir comment caractériser le comportement de ces deux variables aléatoires conjointement.

Définition 13.3

On appelle *couple de variables aléatoires X et Y*, noté (X, Y) l'application

$$(X,Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}.$$

Définition 13.4

On appelle *tribu associée au couple* (X, Y) la plus petite tribu contenant tous les événements

$$((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant Y))_{x,y\in\mathbb{R}}.$$

On la note $\mathcal{A}_{(X,Y)}$

Définition 13.5

On appelle *loi du couple aléatoire* (X, Y) la donnée de fonction $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, appelée *fonction*

de répartition conjointe, définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)).$$

On dira donc que deux couples aléatoires suivent la même loi conjointe s'ils ont les mêmes fonctions de répartitions conjointes.

On a le théorème (admis) suivant

Théorème 13.6

Soient X_1, Y_1, X_2, Y_2 quatre variables aléatoires. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Alors si les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi, alors les variables aléatoires $g(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2)$ ont la même loi.

Exemple : On admet que la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue. Alors si deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi, les variables aléatoires $X_1 + Y_1$ et $X_2 + Y_2$ ont la même loi.

13.3 Couples de variables aléatoires discrètes

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes. On note $\{x_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{y_j \mid j \in J\}$) l'image de X (resp. Y).

D'après la définition, la loi de (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée de

$$\forall i \in I,\ \forall j \in J,\ p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

Dans le cas où X et Y sont finies, on pourra donc représenter la loi conjointe sous forme d'un tableau :

(X,Y)		Valeurs de Y			
		y_1	y_2	$\cdots$	y_p
Valeurs de X	x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,p}$
	x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,p}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\cdots$	$p_{n,p}$

EXERCICE : On lance simultanément deux dés. On note X le plus petit des deux dés, et Y le plus grand. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Réciproquement :

Proposition 13.7

Une suite double $(p_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ est la loi conjointe d'un couple aléatoire discret si et seulement si

- $\forall i \in I,\ \forall j \in J,\ p_{i,j} \geqslant 0$
- la série double $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} p_{i,j}$ converge absolument vers 1.

Démonstration. Le sens direct est facile : les $p_{i,j}$ étant des probabilités, ils sont forcément positifs. De plus, les événements $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ forment un système complet, et donc la somme de leurs probabilités vaut 1.

Le sens réciproque est admis. □

Définition 13.8

On appelle *lois marginales du couple* (X, Y) les lois de X et de Y.

Il est facile de trouver les lois de X et Y à partir de la loi conjointe :

Proposition 13.9

La loi de X est donnée par

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j\in J} p_{i,j}.$$

De même, la loi de Y est donnée par

$$\forall j \in J,\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i\in I} p_{i,j}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales. □

NOTA : Dans le cas de lois finies, en représentant la loi du couple comme un tableau, il suffit de sommer les éléments des lignes (resp. des colonnes) pour trouver la loi de X (resp. Y).

(X,Y)		Valeurs de Y				Somme de la ligne
		y_1	y_2	$\cdots$	y_p	
Valeurs de X	x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,p}$	$\mathbb{P}(X=x_1)$
	x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,p}$	$\mathbb{P}(X=x_2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\cdots$	$p_{n,p}$	$\mathbb{P}(X=x_n)$
Somme de la colonne		$\mathbb{P}(Y=y_1)$	$\mathbb{P}(Y=y_2)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(Y=y_p)$	1

Exercice : Déterminer les lois marginales de l'exercice précédent.

Il est donc facile de trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe. En revanche, il est souvent très difficile de faire l'opération inverse : il n'y a pas, dans le cas général, de façon simple de trouver la loi conjointe connaissant les lois marginales.

En revanche, si les variables sont indépendantes :

Proposition 13.10

Si X et Y sont indépendantes, alors pour tous i, j

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Définition 13.11

Soit $i \in I$ tel que $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$. On appelle *loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$* l'application

$$\begin{array}{rcl} \{y_j \mid j \in J\} & \longrightarrow & [0,1] \\ y_j & \longmapsto & \mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j) = \frac{p_{i,j}}{\mathbb{P}(X=x_i)} \end{array}$$

On a alors, en appliquant directement la formule des probabilités totales

Proposition 13.12

On suppose que tous les $\mathbb{P}(X = x_i)$ et $\mathbb{P}(Y = y_j)$ sont non nuls. Alors pour tous i, j

- $p_{i,j} = \mathbb{P}(Y = y_j)\mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j)$

- $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(Y = y_j)\mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$
- $\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j)$

Comme dit précédemment, les lois marginales ne suffisent pas à déterminer la loi conjointe, mais une loi marginale et les lois conditionnelles de l'autre variables suffisent.

13.4 Fonctions de deux variables aléatoires

Comme on l'a vu, on peut prendre la fonction d'un couple de variable aléatoire.

Proposition 13.13

Si X et Y sont discrètes, alors pour toute fonction, $g(X, Y)$ est discrète.

On considérera donc des variables comme $X + Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$, *etc.*

Pour trouver la loi de $g(X, Y)$, *i.e.* pour calculer les $\mathbb{P}(g(X, Y) = z)$, il suffit de sommer les $P(X = x \cap Y = y)$ pour tous les x, y tels que $g(x, y) = z$:

$$\mathbb{P}(g(X, Y) = z) = \sum_{g(x,y)=z} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y).$$

On peut alors appliquer le théorème de transfert

Théorème 13.14 – de transfert

La variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ admet une espérance si et seulement si la série double $\sum g(x, y)\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$ converge absolument, et dans ce cas

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i \in I, j \in J} g(x_i, y_j)\mathbb{P}(X = X_i \cap Y = y_j).$$

EXERCICE : En se servant du théorème de transfert, montrer la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

13.4.1 Somme de deux variables indépendantes

Proposition 13.15

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{\substack{i\in I, j\in J \\ x_i+y_j=z}} \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j).$$

On dit alors que la loi de $X+Y$ est le *produit de convolution* des lois de X de Y.

Démonstration. On a vu comment trouver la loi de $g(X,Y)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=z) &= \sum_{\substack{i\in I, j\in J \\ x_i+y_j=z}} \mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_i) \\ &= \sum_{\substack{i\in I, j\in J \\ x_i+y_j=z}} \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)\end{aligned}$$

□

On a alors certains résultats de stabilité.

Proposition 13.16

L'ensemble des lois de Poisson est stable par somme.

Plus précisément, soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. Alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

Démonstration. On a, d'après la formule précédente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N} \\ i+j=n}} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=n-i)\end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}(X=i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ et $\mathbb{P}(Y=n-i) = \frac{\mu^{n-i}e^{-\mu}}{(n-i)!}$. Donc

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{n-i}e^{-\mu}}{(n-i)!}$$

En appliquant la formule du binôme, on obtient donc bien

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!\lambda^i\mu^{n-i}}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n\end{aligned}$$

□

Proposition 13.17

L'ensemble des lois binomiales de probabilité p est stable par somme.

Plus précisément, soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p).$$

Démonstration. En revenant à la définition de loi binomiale :

- X correspond au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- Y correspond au nombre de succès dans la répétition de m épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p

$X+Y$ est donc le nombre de succès dans la répétition de $n+m$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. □

13.4.2 Maximum de deux variables

Proposition 13.18

On a, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$(\max(X,Y) \leqslant z) = (X \leqslant z) \cap (Y \leqslant z).$$

Si X et Y sont indépendantes, on a alors

$$F_{\max(X,Y)}(z) = F_X(z)F_Y(z).$$

Démonstration. Le premier point est évident par définition du max.

Si X et Y sont indépendantes, on a alors

$$\begin{aligned} F_{\max(X,Y)}(z) &= \mathbb{P}(\max(X,Y) \leqslant z) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant z \cap Y \leqslant z) \\ &= F_X(z)F_Y(z) \end{aligned}$$

□

On note que dans le cas du max, c'est la fonction de répartition qui nous donne la loi de probabilité.

EXERCICE : En procédant de la même façon, trouver la loi de $\min(X,Y)$.

13.5 Covariance et corrélation linéaire

Dans cette section, on reprend les variables aléatoires discrètes de la section précédente.

Commençons par essayer de calculer l'espérance d'un produit de variables aléatoires.

Proposition 13.19

Si X, Y sont indépendantes, alors si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert, il suffit d'étudier la convergence et de calculer la somme double

$$\sum_{i\in I, j\in J} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left|x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)\right| &= |x_i||y_j||\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)| \\ &= |x_i \mathbb{P}(X = x_i)||y_j \mathbb{P}(Y = y_j)|\end{aligned}$$

Comme X et Y admettent une espérance, la somme converge bien, et donc XY admet une espérance. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I, j\in J} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \sum_{j\in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

□

Exercice : Montrer que, dans le cas où X et Y ne sont pas indépendantes mais admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet toujours une espérance.

13.5.1 Covariance

Définition 13.20

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on appelle *covariance de X et Y* le nombre réel

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right).$$

NOTA : D'après l'exercice précédent, puisque X et Y ont un moment d'ordre 2, XY admet bien une espérance.

NOTA : On note que la covariance d'une variable avec elle-même est égale à la variance.

Proposition 13.21 – Formule de Hyugens

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) &= \mathbb{E}\left(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

□

La covariance est une fonction bilinéaire, symétrique et positive :

Proposition 13.22

On suppose que X, Y, Z admettent un moment d'ordre 2. Alors

- *Symétrie :* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- *Bilinéarité :*
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$
- *Positivité :* $\mathrm{Cov}(X,X) \geqslant 0$

Proposition 13.23

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 et sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

NOTA : Attention ! La réciproque est fausse. La nullité de la covariance n'est en aucun cas une condition nécessaire et suffisante d'indépendance. On pourra retenir le contre-exemple suivant :

Soit Z une variable qui vaut -1 et 1 avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$ *. Soit X une variable aléatoire discrète quelconque admettant une espérance et une variance, indépendante de Z.

Alors X et $Y = ZX$ ne sont pas indépendantes, mais

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(ZX) = 0.$$

On peut s'en servir pour calculer, dans le cas d'indépendance, la variance d'une somme de variables aléatoires.

Théorème 13.24

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $X+Y$ admet un moment d'ordre 2, et

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

En particulier, dans le cas où X et Y sont indépendantes, on a donc

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Démonstration. Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

□

Nota : Dans le cas où on connaît la loi de $X+Y$, on peut s'en servir pour calculer la covariance :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)).$$

Proposition 13.25 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance. On a

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Démonstration. C'est une inégalité de Cauchy-Schwarz, aussi on étudie la fonction $\varphi : t \mapsto \mathbb{V}(tX - Y)$.

On a $\mathbb{V}(tX - Y) = t^2\mathbb{V}(X) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)t + \mathbb{V}(Y)$: φ est un trinôme du second degré, qui est toujours positif. Son discriminant est donc négatif.

On en déduit donc que $4\,\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$, et donc le résultat. □

*. On dit que Z suit la loi de Rademacher

13.6 Exercices

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Reconnaître la loi de Y.

Réponse de l'exercice

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) &= \mathbb{P}_{[X=x]}(Y = y)\mathbb{P}(X = x)\\ &= \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\end{aligned}$$

2. On peut alors trouve la loi de Y en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = y) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\\ &= \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+y}{y} p^y (1-p)^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!}\\ &= (p\lambda)^y e^{-\lambda} \frac{1}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^x}{x!}\\ &= (p\lambda)^y \frac{1}{y!} e^{-\lambda p}\end{aligned}$$

Y suit alors une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi marginale de Y.

3. Sachant
$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$
Déterminer la loi de X

4. Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Réponse de l'exercice

1. La somme de toutes les probabilités doit faire 1. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^n p(1-p)^n &= p\sum_{n=0}^{\infty}(2a(1-p))^n \\ &= \frac{p}{1-2a(1-p)}\end{aligned}$$
On doit donc avoir $a = \frac{1}{2}$.

2. On utilise la formule des probabilités totales : pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k\cap Y=n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^n p(1-p)^n \\ &= p(1-p)^n\end{aligned}$$

3. De même, pour $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(X=k\cap Y=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a^n p(1-p)^n \\ &= \frac{pa^k(1-p)^k}{(1-a(1-p))^{k+1}} \\ &= \frac{p(1-p)^k}{2^k\left(\frac{p+1}{2}\right)^{k+1}} \\ &= \frac{2p}{p+1}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k\end{aligned}$$

4. On a pour $k = n = 0$:
$$\mathbb{P}(X=0\cap Y=0) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = \frac{2p^2}{p+1},$$
et comme $p \in]0,1[$, les variables ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 3

Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Les variables $S = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$ sont-elles indépendantes ?

Réponse de l'exercice

Les variables ne sont pas indépendantes : on a par exemple

$$\mathbb{P}_{[T=1]}(S=2) = 0 \neq \mathbb{P}(S=2).$$

Exercice 4

Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega\mathcal{T}, \mathbb{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Réponse de l'exercice

Supposons X et Y indépendantes. Soit x tel que $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$. On a alors

$$\mathbb{P}_{[X=x]}(f(X) = f(x)) = 1 = \mathbb{P}(f(X) = f(x)).$$

Ainsi, la variable $f(X)$ est une variable constante.

Réciproquement, si $f(X)$ est constante, alors les variables X et $f(X)$ sont indépendantes.

Exercice 5

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Le cinéma comporte $N \geqslant 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. On note, pour $i \in [\![1, N]\!]$, X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse i.

1. Déterminer la loi de X_i sachant $X = n$, puis en déduire la loi de X_i.
2. Déterminer, sans calculs, la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   Indication : On pourra montrer que pour tous i, j, n tels que $n \geqslant i + j$, $\frac{1}{n!}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{1}{i!j!(n-i-j)!}$

Réponse de l'exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$
   $$\mathbb{P}_{[X=n]}(X_i = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k}$$
   On peut alors utiliser le résultat de l'exercice 1 pour voir que $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{N}\right)$.
2. On a avec exactement le même calcul $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{2\lambda}{N}\right)$.
3. On a alors
   $$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2),$$
   d'où
   $$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\lambda}{N} - \frac{\lambda}{N} - \frac{\lambda}{N}\right) = 0.$$

4. Il faut calculer...pour $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{[X=n]}(X_1 = i \cap X_2 = j)\mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=i+j}^{\infty} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} \frac{1}{N^{i+j}} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=i+j}^{\infty} \frac{1}{i!j!(n-i-j)!} \frac{1}{N^{i+j}} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} e^{-\lambda} \lambda^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!n!} \frac{1}{N^{i+j}} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n} e^{-\lambda} \lambda^{n+i+j} \\
&= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!N^{i+j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\left(1 - \frac{2}{N}\right)\lambda\right)^n}{n!} \\
&= e^{-\frac{2\lambda}{N}} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!N^{i+j}} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j)
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soient $U, V \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ indépendantes.

1. On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Déterminer la loi de S.
2. On pose $T = (U-1)(V-1) + 1$. Calculer $E(S(T-1))$.
3. Déterminer la loi de T.
4. Calculer la covariance de S et T. Sont-elles indépendantes ?

Réponse de l'exercice

1. Commençons par noter que

$$\mathbb{P}(U = 0) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(U = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{4},$$

de même pour V.
L'image de S est $\{0, 1, 2\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = 0) &= \mathbb{P}(U = 1 \cap V = 1) \\
&= \mathbb{P}(U = 1)\mathbb{P}(V = 1) \\
&= \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(S = 1) &= \mathbb{P}(U = 0 \cap V = 1 \cup U = 1 \cap V = 0 \cup U = 1 \cap V = 2 \cup U = 2 \cap V = 1) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(S = 2) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

S suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$.

2. Par indépendance et linéarité, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}((U-1)^3(V-1)+(U-1)(V-1)^3)\\ &= \mathbb{E}((U-1)^3)\mathbb{E}(V-1)+\mathbb{E}(U-1)\mathbb{E}((V-1)^3)\\ &= 0\end{aligned}$$

3. T a pour image $\{0,1,2\}$. On calcule facilement

$$\mathbb{P}(T=0)=\mathbb{P}(T=2)=\frac{1}{8},$$

et on en déduit $\mathbb{P}(T=1)=\frac{3}{4}$.

4. Par la formule de Huygens, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(S,T) &= \mathbb{E}(ST)-\mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T)\\ &= \mathbb{E}(S(T-1))+\mathbb{E}(S)(1-\mathbb{E}(T))\\ &= 0\end{aligned}$$

On note de plus que

$$\mathbb{P}(S=0\cap T=0)=0\neq\mathbb{P}(S=0)\mathbb{P}(T=0).$$

Exercice 7

Soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètres respectifs p et q.

1. Montrer que $|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leqslant\frac{1}{4}$.
2. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Réponse de l'exercice

1. On sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$. Or pour des variables de Bernoulli, on a

$$\mathbb{V}(X)=p(1-p)\quad\text{et}\quad\mathbb{V}(Y)=q(1-q).$$

La fonction $x\in[0,1]\mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$, qui vaut $\frac{1}{4}$, et on a bien le résultat voulu.

2. On note que pour des variables de Bernoulli, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{P}(X=1\cap Y=1)-\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1).$$

Ainsi, si la covariance est nulle, les événements $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont bien indépendants. Les trois autres cas s'en déduisent par complémentaire.

Exercice 8

Soient X,Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, admettant la même espérance $M\neq 0$ et la même variance $V\neq 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.

2. Les variables $X+Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Réponse de l'exercice

1. On a facilement, par indépendance, $\mathbb{E}(XY) = M^2$. On a ensuite
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(XY) &= \mathbb{E}(X^2Y^2) - \mathbb{E}(XY)^2 \\ &= (V+M^2)^2 - M^4 \\ &= V^2 + 2VM^2\end{aligned}$$

2. Calculons leur covariance
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y, XY) &= \mathbb{E}((X+Y)XY) - \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(XY) \\ &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)^2 \\ &= 2MV \\ &\neq 0\end{aligned}$$
Ainsi, les deux variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 9

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages indépendants avec remise, et on note X le numéro de la première boule et Y celui de la seconde.

On note I le plus petit numéro des deux, et S le plus grand.

1. Donner les lois de I et S.
2. Calculer les espérances, puis les variances de I et S.
3. Calculer $\mathbb{V}(I+S)$ et fonction de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$. En déduire la covariance de I et S.

Réponse de l'exercice

1. On a déjà vu en cours que la loi de S est donnée par
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(S=k) = \frac{2k-1}{n^2}.$$
Cherchons alors la loi de I. On a
$$I \geqslant k \Leftrightarrow X \geqslant k \quad \text{et} \quad Y \geqslant k,$$
et on sait que
$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n-k+1}{n},$$
et de même pour Y.
On trouve finalement
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(I \geqslant k) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2},$$
et on en déduit facilement
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(I=k) = \mathbb{P}(I \geqslant k) - \mathbb{P}(I \geqslant k+1) = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

2. En utilisant la définition d'espérance et les lois de I et S, on trouve

$$\mathbb{E}(S) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(I) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

En utilisant la formule de König-Huygens, on obtient

$$\mathbb{V}(S) = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(I) = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

3. On note facilement que $I + S = X + Y$. On a donc

$$\mathbb{V}(I+S) = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \frac{n^2-1}{6}.$$

Or on sait que

$$\mathbb{V}(I+S) = \mathbb{V}(I) + \mathbb{V}(S) + 2\,\mathrm{Cov}(I,S),$$

et donc on peut calculer la covariance

$$\mathrm{Cov}(I,S) = \frac{\mathbb{V}(I+S) - \mathbb{V}(I) - \mathbb{V}(S)}{2} = \frac{(n^2-1)^2}{36n^2}.$$

Exercice 10

Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2.

2. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer que la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par :

$$\mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}.$$

3. a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, N]\!],\ \mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

   b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

5. On suppose A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, N]\!]$, et on désigne par D l'événement : "A ne prend pas la même valeur que B".

   a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{N-1}{N}$.

   b) On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A, B)$ et $Y_2 = \max(A, B)$.
   Calculer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$ la probabilité conditionnelle :
   $$\mathbb{P}_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)).$$

   c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N = 10$:

```python
from random import *
a = randint(1,10)
b = randint(1,10)
while a==b:
    b = randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max(a,b))

```

Réponse de l'exercice

1. On propose le programme suivant :

```python
import random as rd
N=10
x1=x2=-1
urne = [0,0]+[1 for _ in range(N-2)]
for i in range(N):
    num = rd.randint(0,N-i-1)
    boule = urne.pop(num)
    if boule == 0:
        if x1 == -1:
            x1 = i+1
        elif x2 == -1:
            x2 = i+1
print("X1 = ",x1,"X2 = ",x2)
```

2. Il est clair qu'on ne peut pas avoir $X1 \geqslant X2$, et donc le premier cas est facile.
   Supposons donc $1 \leqslant i < j \leqslant N$. De façon combinatoire, en prenant $\Omega = \mathfrak{S}_N$, c'est-à-dire l'ensemble des tirages possibles.
   Pour placer les boules noires aux rangs i et j, il y a deux possibilités pour les boules noires, et $(N-2)!$ possibilités pour les boules blanches.
   Finalement, on a
   $$\mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = j) = \frac{2(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N(N-1)}.$$

3. a) Soit $k \in [\![1, N-2]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k) &= \sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = k \cap X_2 = j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N-k)}{N(N-1)}\end{aligned}$$

On trouve la loi de X_2 de la même façon.

b) Pour $k = 2$, on a alors $\mathbb{P}(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2)$.

4. L'univers image de X_2 est $[\![2, N]\!]$, et donc celui de $N + 1 - X_2$ est bien $[\![1, N-2]\!]$.
On a alors pour tout k dans cet ensemble

$$\mathbb{P}(N + 1 - X_2 = k) = \mathbb{P}(X_2 = N + 1 - k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} = \mathbb{P}(X_1 = k).$$

5. a) On calcule plutôt la probabilité de $\overline{D}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{D}) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A = k \cap B = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A = k)\mathbb{P}(B = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N^2} \\ &= \frac{1}{N}\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathbb{P}(D) = \frac{N-1}{N}$.

b) Si $i > j$, il est clair que la probabilité est nulle. Supposons alors $i \leqslant j$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_D(Y_1 = i \cap Y_2 = j) &= \frac{\mathbb{P}(Y_1 = i \cap Y_2 = j)}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((A = i \cap B = j) \cup (A = j \cap B = i))}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{\frac{1}{N}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{1}{N}}{\frac{N-1}{N}} \\ &= \frac{2}{N(N-1)}\end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, les couples (Y_1, Y_2) et (X_1, X_2) ont la même loi conjointe. Simuler l'une ou l'autre donnera donc les mêmes résultats.