Géométrie et produits scalaires

15

15.1 Rappels de géométrie dans le plan et l'espace

On notera $\mathcal{P}$ le plan euclidien, et $\mathcal{E}$ l'espace euclidien.

Définition 15.1

On appelle *droite* la donnée de

- un vecteur u , appelé vecteur directeur
- un point A

La droite est alors l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \text{ et } u \text{ sont colinéaires.}$$

On note (AB) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A . On a donc

$$(AB) = \{M \in \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}\}.$$

Si le réel λ est limité à $[0, 1]$, on parle alors de *segment* $[AB]$.

Proposition 15.2 – Représentation paramétrique d'une droite du plan

Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a, b)$ passant par $A(x_A, y_A)$. Alors un point $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}$$

Proposition 15.3 – Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a, b, c)$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un point

$M(x, y, z)$ appartient à la droite si et seulement si

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Proposition 15.4 – Équation cartésienne d'une droite du plan

Soit (d) la droite de vecteur directeur u passant par $A(x_A, y_A)$. Soit $v = (a, b)$ un vecteur orthogonal à u . Alors un point $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_B) = 0.$$

Définition 15.5

Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $R > 0$. On appelle *cercle de centre Ω et de rayon R* l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = R\}.$$

Proposition 15.6 – Équation paramétrique du cercle

Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M(x_\Omega + R \cos \theta, y_\Omega + R \sin \theta) \mid \theta \in]-\pi, \pi[\}.$$

Proposition 15.7 – Équation implicite du cercle

Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2\}.$$

Réciproquement, toute courbe d'équation implicite $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec $a^2 + b^2 \geq 4c$ est une équation de cercle.

Définition 15.8

Un plan de l'espace $\mathcal{P}$ est défini par deux vecteurs non colinéaires et un point A . Plus précisément, si u, v sont des vecteurs et A un point, alors

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda u + \mu v\}.$$

Proposition 15.9 – Représentation paramétrique d'un plan

Soit P le plan de vecteurs directeurs $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

Proposition 15.10 – Équation cartésienne d'un plan

Soit P le plan de vecteurs directeurs u et v passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

Soit $w = (a, b, c)$ un vecteur orthogonal au plan.

Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

15.2 Produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette section, on travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$.

15.2.1 Produits scalaires

Définition 15.11

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une forme bilinéaire si :

- $\forall v \in E, u \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v, w \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(u + \lambda w, v) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(w, v).$$

- $\forall u \in E, v \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v, w \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(u, v + \lambda w) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, w).$$

Une fonction qui vérifie le premier point est dite *linéaire à gauche*, et une fonction qui vérifie le second point est dite *linéaire à droite*.

EXEMPLE : L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y), (u, v) & \longmapsto & xu + yv \end{array}$$

est bilinéaire. En effet, soient $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On a

$$\begin{aligned} \varphi((x, y) + \lambda(a, b), (u, v)) &= \varphi((x + \lambda a, y + \lambda b), (u, v)) \\ &= (x + \lambda a)u + (y + \lambda b)v \\ &= xu + \lambda au + yv + \lambda bv \\ &= \varphi((x, y), (u, v)) + \lambda \varphi((a, b), (u, v)) \end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned} \varphi((x, y), (u, v) + \lambda(a, b)) &= \varphi((x, y), (u + \lambda a, v + \lambda b)) \\ &= x(u + \lambda a) + y(v + \lambda b) \\ &= xu + \lambda ax + yv + \lambda by \\ &= \varphi((x, y), (u, v)) + \lambda \varphi((x, y), (a, b)) \end{aligned}$$

Définition 15.12

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si

$$\forall u, v \in E, \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

EXEMPLE : L'application définie précédemment est symétrique.

NOTA : Pour montrer qu'une application est une forme bilinéaire symétrique, il n'y a besoin de montrer que la linéarité à gauche ou à droite, et la symétrie prouvera la linéarité par rapport à l'autre variable.

Les formes bilinéaires symétriques se comportent comme des produits :

Proposition 15.13

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors :

- $\forall u \in E, \varphi(u, 0) = \varphi(0, u) = 0$
- $\forall u, v \in E, \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v)$.

Démonstration. Soit $u \in E$. Alors $v \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire, donc envoie 0 sur 0.

Si $u, v \in E$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi(u+v, u+v) &= \varphi(u+v, u) + \varphi(u+v, v) && \text{par linéarité à droite} \\ &= \varphi(u, u) + \varphi(v, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, v) && \text{par linéarité à gauche} \\ &= \varphi(u, u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v) && \text{par symétrie} \end{aligned}$$

□

Définition 15.14 – Produit scalaire

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est un *produit scalaire* sur E si

- φ est une forme bilinéaire
- φ est symétrique
- φ est définie positive, *i.e.*

$$\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Les notations usuelles pour les produits scalaires sont $\langle u, v \rangle$, $(u | v)$, $u \cdot v$.

EXEMPLE : L'application des exemples précédents est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a déjà vu qu'elle était bilinéaire symétrique, et si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi((x, y), (x, y)) = x^2 + y^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = y = 0$.

NOTA : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. S'il est de plus de dimension finie, on parle d'*espace euclidien*.

On peut en fait généraliser l'exemple précédent à tout E :

Proposition-Définition 15.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur E , appelé *produit scalaire canonique*.

NOTA : On remarque que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve le produit scalaire usuel dans le plan et dans l'espace.

NOTA : On note que si on voit u et v comme des vecteurs colonnes, on a en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$:

$$\langle u, v \rangle = u^T \times v.$$

Démonstration. Montrons que l'application est linéaire à gauche : soient $u, v, w \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v, w \rangle &= \sum_{k=1}^n (u_k + \lambda v_k) w_k \\ &= \sum_{k=1}^n u_k w_k + \lambda \sum_{k=1}^n v_k w_k \\ &= \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'elle est symétrique : soient $u, v \in E$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_{k=1}^n u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^n v_k u_k \\ &= \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

Montrons qu'elle est définie positive : soit $u \in E$.

$$\langle u, u \rangle = \sum_{k=1}^n u_k^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si tous les u_k sont nuls, i.e. $u = 0$.

□

Théorème 15.16 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Alors

$$\forall u, v \in E, \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

De manière équivalente,

$$\forall u, v \in E, |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

De plus, on a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

NOTA : On remarque que ce résultat ressemble à celui du même nom vu pour la covariance. On va en effet faire une démonstration très similaire.

Démonstration. Si u ou v est nul, le résultat est trivial. Supposons donc $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle.$$

Par positivité du produit scalaire, on a bien $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$, et par bilinéarité, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^2 \langle u, u \rangle + 2t \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

f est donc un trinôme du second degré, qui est toujours positif; son discriminant est donc négatif :

$$4 \langle u, v \rangle^2 - 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0.$$

On retrouve l'inégalité cherchée.

Supposons maintenant qu'on a l'égalité. Le trinôme f a donc une unique racine; on la note a . Mais alors $f(a) = \langle au + v, au + v \rangle = 0$, et donc $au + v = 0$. Donc u et v sont colinéaires.

Inversement, si u et v sont colinéaires, on peut écrire par exemple $u = \lambda v$. Dans ce cas

$$\varphi(u, v)^2 = \lambda^2 \varphi(u, u)^2 = \varphi(u, u) \varphi(\lambda u, \lambda u).$$

□

15.2.2 Norme

Dorénavant, on suppose qu'on a un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E .

Définition 15.17

La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'application

$$\| \cdot \| : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u \longmapsto \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{array} .$$

Corollaire 15.18 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit donc

$$\forall u, v \in E, |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

EXEMPLE : La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ est bien la norme euclidienne usuelle dans le plan :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition 15.19

Soit $u \in E$. Alors

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Démonstration. Ces deux propriétés viennent directement de celles du produit scalaire :

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \|u\|^2} = |\lambda| \|u\|.$$

Si $u = 0$, il est clair que $\|u\| = 0$. Si $\|u\| = 0$, alors $\langle u, u \rangle = 0$, et donc $u = 0$. $\square$

Proposition 15.20 – Inégalité triangulaire (de Minkowski)

Soient $u, v \in E$. Alors

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Démonstration. Tous les termes sont positifs, et on compare donc plutôt les carrés.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

$\square$

Définition 15.21

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est unitaire s'il est de norme 1.

Si $u \in E$ est non nul, on appelle *normalisé* de u le vecteur unitaire $\frac{1}{\|u\|}u$.

15.2.3 Vecteurs orthogonaux

On rappelle qu'on travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 15.22

Soient u et v deux vecteurs de E . On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$.

On note alors $u \perp v$.

NOTA : On note que la notion d'orthogonalité dépend donc du produit scalaire choisi.

NOTA : On note que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

EXERCICE : Montrer que la réciproque est vraie : si un vecteur est orthogonal à tous les autres vecteurs, alors c'est le vecteur nul.

On peut alors écrire le célèbre théorème :

Théorème 15.23 – de Pythagore

Soient u et v dans E .

Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Dans le cas de plus de deux vecteurs, un seul sens reste vrai :

Théorème 15.24 – de Pythagore

Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E deux à deux orthogonaux. On a alors

$$\left\| \sum_{k=1}^p u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|u_k\|^2.$$

Définition 15.25

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G :

$$\forall f \in F, \forall g \in G, \langle f, g \rangle = 0.$$

Proposition-Définition 15.26

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle *orthogonal de F* , noté $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F .

Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E , orthogonal à F .

15.3 Bases orthonormées, matrices symétriques

Proposition 15.27

Soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs non nuls de E . Si les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux, alors la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.

Démonstration. Supposons donc que les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux. Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i = 0.$$

Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Alors par bilinéarité du produit scalaire, et les vecteurs étant deux à deux orthogonaux, on a donc

$$\sum_{i=1}^k a_i \langle u_i, u_j \rangle = 0, \text{ puis } a_j \|u_j\|^2 = 0.$$

Le vecteur u_j étant non nul, sa norme aussi, et donc $a_j = 0$.

Ceci étant vrai pour tout j , on a bien la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_j)$. $\square$

Définition 15.28

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une *base orthogonale* de E si tous les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.

On dit que $\mathcal{B}$ est une *base orthonormée* si $\mathcal{B}$ est une base orthogonale, et que tous les e_i sont de norme 1.

NOTE : D'après la propriété précédente, une base orthogonale est toujours libre, et donc est bien une base.

Théorème 15.29

Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire admet une base orthonormée.

On note que dans une base orthonormée, les coefficients d'un vecteur sont donnés par des produits scalaires.

Plus précisément, si u est un vecteur de E , on peut l'écrire

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Mais en prenant le produit scalaire par e_i , on obtient

$$\langle u, e_i \rangle = \alpha_i.$$

On a donc, dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$,

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k.$$

On peut alors décomposer les vecteurs de E

Proposition 15.30

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Pour tout vecteur x de E , il existe un unique couple $(u, v) \in F \times F^\perp$ tel que $x = u + v$.

Démonstration. Soit alors $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F . On démontre le résultat par analyse-synthèse.

- Supposons donc $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$.

On peut alors décomposer $u = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k$.

Mais on a pour tout k

$$\langle u, e_k \rangle = \langle u, e_k \rangle + \langle v, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle.$$

Ainsi, on a nécessairement $u = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$, et $v = x - u$, ce qui montre l'unicité.

- Si on prend de tels u et v , on a bien $x = u + v$ et $u \in F$.

On a alors pour tout k :

$$\langle v, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle u, e_k \rangle = 0,$$

et on a bien $v \in F^\perp$.

□

Les matrices de changement de bases ont alors une propriété intéressante :

Proposition 15.31

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ vérifie $P^{-1} = P^T$.

Démonstration. Notons $x_{i,j}$ les coordonnées dans la base canonique du vecteur e_j . Soient alors $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors, par produit matriciel

$$(PP^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{i,k} x_{j,k} = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc bien $PP^T = I_n$. □

Considérons alors deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Soient alors u et v deux vecteurs de E , qu'on exprime dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n a_i f_i \\ v &= \sum_{i=1}^n \beta_i e_i = \sum_{i=1}^n b_i f_i \end{aligned}$$

On a alors par bilinéarité

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Ainsi :

Proposition 15.32

On peut calculer le produit scalaire (et donc la norme) en utilisant les coordonnées dans n'importe quelle base orthonormée.

Plus précisément, si u et v sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ dans une base orthonormée quelconque, alors

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k = {}^T \text{mat}_{\mathcal{B}} u \text{ mat}_{\mathcal{B}} v.$$

On peut alors étudier les matrices symétriques :

Proposition 15.33

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On suppose qu'il existe deux vecteurs propres U et V respectivement associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ .

Alors u et v sont orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

Démonstration. Alors d'un côté

$$\begin{aligned} \lambda \langle U, V \rangle &= \langle AU, V \rangle \\ &= ({}^T AU) V \\ &= U^T A^T V \\ &= U^T AV \\ &= \mu U^T V \\ &= \mu \langle U, V \rangle \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on a bien $\langle U, V \rangle = 0$. □

On a alors le théorème suivant :

Théorème 15.34 – spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Plus précisément, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$P^{-1} = P^T \quad \text{et} \quad A = PDP^T.$$

NOTA : Attention, ce résultat est faux pour les matrices complexes. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est bien symétrique, mais n'admet que 0 comme valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 1, et n'est donc pas diagonalisable.

15.4 Distances et projection orthogonale

On travaille toujours dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans cette partie, on confondra les points de l'espace avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 15.35

Soient u et v deux vecteurs de E . On appelle *distance de u à v* le réel positif

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}.$$

On peut alors définir la distance entre un point et une partie de l'espace.

Définition 15.36

Soient $u \in E$ et A une partie* de E . On appelle *distance de u à A* la borne inférieure des distances de u à un point de A :

$$d(u, A) = \inf\{d(u, v) \mid v \in A\}.$$

NOTA : Cette distance n'est pas nécessairement atteinte.

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel de E , on peut plus facilement calculer cette distance. On a pour cela besoin de généraliser la notion de projection orthogonale.

*. A n'étant pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E .

Définition 15.37

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle alors *projection orthogonale* sur F tout endomorphisme p tel que :

$$\forall u \in F, \forall v \in F^\perp, p(u + v) = u.$$

NOTA : On note que c'est équivalent à dire que

- pour tout $x \in E, p(x) \in F$
- pour tous $x \in E$ et $y \in F, p(x) - x$ et y sont orthogonaux.

On a alors

Théorème 15.38

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F .

Il existe une unique projection orthogonale sur F , définie par

$$p : E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \sum_{k=1}^m \langle x, e_k \rangle e_k .$$

Démonstration. On note que cet endomorphisme est bien une projection orthogonale sur F : si $u \in F$ et $v \in F^\perp$, on a bien

$$p(u + v) = \sum_{k=1}^m \langle u + v, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^m \langle u, e_k \rangle e_k = u.$$

Reste alors à montrer l'unicité.

Soit $q \in \mathcal{L}(E)$ une projection orthogonale sur F . Soit $u \in E$. Comme $q(u)$ est dans F , il existe donc des réels λ_k tels que

$$q(u) = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k.$$

Les e_k étant dans F , on a donc pour tout k :

$$\langle q(u) - u, e_k \rangle = \lambda_k - \langle u, e_k \rangle = 0,$$

et on retrouve bien les coefficients de p .

Donc $q = p$, et on a donc bien unicité de la projection orthogonale. $\square$

EXERCICE : Soit $v \in E$ non nul.

Donner l'expression de la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(v)$.

Les projections orthogonales ont alors des propriétés intéressantes :

Proposition 15.39

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et soit p la projection orthogonale sur F . Alors

- $p \circ p = p$
- $\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}) = F$
- $\ker(p) = F^\perp$.

Démonstration. • Il suffit de noter que pour tout $v \in F$, on a $p(v) = v$: c'est vrai pour tous les vecteurs de la base orthonormée de F .

Comme pour tout $u \in E$, $p(u) \in F$, on a donc bien $p(p(u)) = p(u)$.

- Soit donc $v \in \text{Im}(p)$: il existe un $u \in E$ tel que $v = p(u)$. Montrons que $p(v) - v = 0$.

On a $p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$, et donc on a bien $v \in \ker(p - \text{id})$.

Soit maintenant $u \in \ker(p - \text{id})$. On a donc $p(u) = u$. D'après la définition de projection orthogonale, on a donc $u \in F$.

Enfin, soit $u \in F$. On peut décomposer u sur une base orthonormée de F : $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i$.

On a alors par bilinéarité du produit scalaire

$$p(u) = \sum_{k=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^m u_i e_i, e_k \right\rangle e_k = u.$$

On a donc bien $u \in \text{Im}(p)$.

- Soit $u \in \ker(p)$. On va montrer que u est orthogonal à tous les vecteurs d'une base orthonormée de F . On a alors

$$p(u) = \sum_{k=1}^m \langle u, e_k \rangle e_k = 0.$$

La famille (e_k) étant libre, les coefficients $\langle u, e_k \rangle$ sont donc tous nuls, et on a bien $u \in F^\perp$.

Réciproquement, si $u \in F^\perp$, alors $\langle u, e_k \rangle = 0$ et donc $p(u) = 0$.

□

Corollaire 15.40

On a $\dim F + \dim(F^\perp) = n$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 15.41

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et soit p la projection orthogonale sur F . On a alors pour tout $u \in E$

- $d(u, F) = d(u, p(u))$
- Pour tout $f \in F$, on a

$$d(u, f)^2 = d(p(u), f)^2 + d(u, F)^2,$$

et en particulier

$$d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

NOTA : On note que d'après la dernière égalité, on a pour tout vecteur u : $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

Une application célèbre de ce théorème est la détermination de la droite des moindres carrés.

On se fixe un ensemble de points $P_i(x_i, y_i)$ du plan $\mathbb{R}^2$, et on cherche une droite qui minimise la somme des carrés des écarts entre les points et la droite. Si la droite a pour équation $y = ax + b$, on veut donc minimiser la quantité

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Soient alors les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$Y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$U = (1, \dots, 1).$$

On définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ $F = \text{Vect}(X, U)$.

Alors, pour tout vecteur $W \in F$, il existe a et b tel que $W = aX + bU$, et donc

$$d(Y, W)^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - (ax_k + b))^2.$$

On cherche donc à minimiser la quantité $d(Y, W)$, qui doit alors être minimale pour $W = p(Y)$, où p est la projection orthogonale sur le plan F .

Comme $W = p(Y)$ est dans F , on peut l'écrire sous la forme $aX + bU$, et on doit donc trouver a et b tels que

$$\langle W - Y, X \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle W - Y, U \rangle = 0.$$

On obtient alors le système linéaire

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + nb &= \sum y_i \end{cases}$$

qu'il suffit de résoudre pour trouver la droite de régression.

15.5 Exercices

Exercice 1

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer les identités suivantes pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$:

1. $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$
2. $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2)$
3. $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

Réponse de l'exercice

Dans les trois cas, il suffit de développer la norme $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que les valeurs propres de $A^T A$ sont toutes positives.
3. Montrer que si A est non nulle, alors $A^T A$ possède une valeur propre strictement positive.

Réponse de l'exercice

1. On a $(A^T A)^T = A^T A$.
2. Soit $\lambda \in \text{Spec}(A^T A)$, et soit X un vecteur propre associé. On a alors

$$X^T A^T A X = \lambda X^T X,$$

et donc $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$.

Comme $\|X\| \neq 0$, on a bien $\lambda \geq 0$.

3. Si A est non nulle, alors on montre facilement que $A^T A$ est non nulle. Comme elle est diagonalisable, elle admet au moins une valeur propre. Si elle était toutes nulles, alors on aurait $A^T A = 0$, ce qui est impossible.

Exercice 3

Montrer que si un point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est dans la boule unité (centrée en 0 et de rayon 1), alors $(x - y + 2z)^2 \leq 6$.

Réponse de l'exercice

On a

$$\begin{aligned}(x - y + 2z)^2 &= \langle (x, y, z), (1, -1, 2) \rangle^2 \\ &\leq \| (x, y, z) \|^2 \| (1, -1, 2) \|^2 \\ &\leq 6\end{aligned}$$

Exercice 4

Dans les cas suivants, justifier que A est diagonalisable, et trouver une matrice P telle que $P^T A P$ soit diagonale.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse de l'exercice

Les trois matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables. On a alors

$$\text{a) } D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps discrétisé de quatre grandeurs a_1, a_2, a_3 et a_4 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, a_i(n+1) = \sum_{j=1}^4 m_{i,j} a_j(n)$$

où $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est une matrice réelle carrée de taille 4 vérifiant

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, m_{i,j} = m_{j,i}.$$

On identifiera les matrices colonnes avec les n -uplets.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $ME_k = \lambda_k E_k$.

On impose $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4|$.

2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \\ a_4(n) \end{pmatrix}$. Les coordonnées de X_0 dans la base $\mathcal{B}$ sont notées y_1, y_2, y_3, y_4 .

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \sum_{k=1}^4 y_k \lambda_k^n E_k.$$

3. Quelle relation matricielle y a-t-il entre les $a_k(0)$ et les y_k ?
4. On étudie informatiquement l'exemple suivant :

$$G = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 22 & 28 \\ 0 & 22 & -28 & -22 \\ 0 & 28 & -22 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{64} G.$$

Dans l'environnement Python, on fera l'importation `import numpy.linalg as lin` pour le module d'algèbre linéaire. On rappelle que `lin.eig(A)` renvoie le 2-tuple formé du vecteur des valeurs propres et de la matrice des coordonnées des vecteurs propres de la matrice A . On rappelle aussi que `lin.inv(A)` retourne l'inverse de la matrice A .

- Afficher les valeurs propres et les vecteurs E_k associés à la matrice M .
- On prend $a_1(0) = 2$, $a_2(0) = 2$, $a_3(0) = 4$ et $a_4(0) = 5$. Calculer les y_k .
- Écrire une fonction Python d'entête `def a(n)` calculant le vecteur X_n .

Réponse de l'exercice

Todo

Exercice 6 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On considère une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$. On considère un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E .

On cherche dans cet exercice un algorithme pour trouver une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de E , telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et $\langle u_i, e_i \rangle > 0$.

- Que vaut nécessairement u_1 ?
- On veut construire u_2 . On note p_1 la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_1)$.
 - Montrer que $v_2 = e_2 - p_1(e_2)$ est orthogonal à u_1 .
 - En déduire un vecteur u_2 qui convient.
- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'on a construit $u_1, \dots, u_k$. On note alors p_i la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_i)$.

- a) Montrer que $v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k p_i(e_{k+1})$ est orthogonal à tous les $u_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
 b) En déduire un vecteur u_{k+1} qui convient.

4. Conclure.

5. On considère la base $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$. Construire une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire canonique, et vérifiant les conditions précédentes.

Réponse de l'exercice

1. On a nécessairement $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
 2. a) Par définition de projection orthogonale, on a bien $\langle v_2, u_1 \rangle = 0$.
 b) Posons alors $u_2 = \frac{e_2 - p_1(e_2)}{\|e_2 - p_1(e_2)\|}$. Alors u_2 est bien orthogonal à u_1 , de norme 1, avec $u_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$
 et

$$\langle v_2, e_2 \rangle = \|e_2\|^2 - \langle u_1, e_2 \rangle^2 > 0$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. a) Soit donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}, u_i \rangle &= \langle e_{k+1} - p_i(e_{k+1}), u_i \rangle - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \langle p_j(e_{k+1}), u_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car pour tout $j \neq i, p_j(e_{k+1}) \in \text{Vect}(u_j)$ et donc $p_j(e_{k+1})$ est orthogonal à u_i .

- b) On pose alors $u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, qui est bien orthogonal à tous les u_i déjà construits, de norme 1, et dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$.

De plus,

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}, e_{k+1} \rangle &= \left\langle v_{k+1}, v_{k+1} + \sum_{i=1}^k p_i(e_{k+1}) \right\rangle \\ &= \|v_{k+1}\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. Par récurrence (finie), on a donc bien construit une base orthonormale vérifiant les conditions voulues.
 5. On pose donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. On calcule ensuite

$$p_1(e_2) = \langle e_2, u_1 \rangle u_1 = (1, 0, 1),$$

puis $v_2 = e_2 - p_1(e_2) = (0, 1, 0)$ et enfin $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0, 1, 0)$.

Pour finir, on calcule

$$p_1(e_3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad p_2(e_3) = (0, -1, 0).$$

On pose alors $v_3 = e_3 - p_1(e_3) - p_2(e_3) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$, puis $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

Exercice 7 **Décomposition de Cartan**

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^T A$.
3. Montrer que toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut se décomposer sous la forme

$$A = OS,$$

avec O une matrice orthogonale et S une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réponse de l'exercice

1. Il est clair que $A^T A$ est symétrique. Si $\lambda \in \text{Spec}(A^T A)$, et X vecteur propre associé, alors

$$\|AX\|^2 = X^T A^T A X = \lambda \|X\|^2,$$

et donc λ est strictement positif.

2. La matrice $A^T A$ est donc symétrique réelle, et donc est semblable à une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tous strictement positifs.

La matrice semblable, par le même changement de base, à la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ est donc solution.

3. Soit S comme précédemment. Posons $O = AS^{-1}$. On a alors

$$O^T O = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n.$$

On a donc bien le résultat voulu.

Exercice 8

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E . Montrer que sont équivalentes

- (i) $\ker(q) \subseteq \ker(p)$
- (ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Réponse de l'exercice

Montrons le sens direct. On suppose donc $\ker(q) \subseteq \ker(p)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En écrivant

$$x = q(x) + x - q(x),$$

on obtient $p(x) = p(q(x)) + p(x - q(x))$. Or $x - q(x) \in \ker(q) \subseteq \ker(p)$, et donc $p(x) = p(q(x))$.

On a alors $\|p(x)\| = \|p(q(x))\| \leq \|q(x)\|$.

Pour le sens réciproque, en supposant l'inégalité, on a pour $x \in \ker(q)$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\| = 0$, et donc $x \in \ker p$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G la matrice de Gram de $(u_1, \dots, u_p)$ par

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. a) Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs u et v sous formes de liste de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
 b) Écrire une fonction Python `Gram` prenant en argument une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.
 c) Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
2. Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.
3. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à montrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.

a) On suppose que G est inversible.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $GX = 0$, puis en déduire que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

b) On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$.

i. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\rangle = 0$.

ii. En déduire que $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0$.

iii. Montrer que $X = 0$, puis que G est inversible.

4. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|v_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \|v_i - v_j\| = 1.$$

a) Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.

- b) En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, que l'on notera G .
- c) On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n , A et I_n (la matrice identité de taille n).
En déduire que A est inversible.
- d) Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Réponse de l'exercice

1. On propose

```

1 import numpy as np
2
3 def ps(u,v):
4     w = [u[k]*v[k] for k in range(len(u))]
5     return sum(w)
6
7 def gram(u):
8     p = len(u)
9     g = np.zeros([p,p])
10    for i in range(p):
11        for j in range(p):
12            g[i,j] = ps(u[i],u[j])
13    return g
14
15 u1 = [1, -1, 0]
16 u2 = [1, 0, -1]
17 u3 = [1, 1, 1]
18 print(gram([u1, u2, u3]))
19

```

2. Par symétrie du produit scalaire, la matrice de Gram d'une famille est symétrique réelle, donc diagonalisable par théorème spectral.
3. a) La k -ième ligne du vecteur GX est

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \langle u_k, u_i \rangle = \left\langle u_k, \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \right\rangle = 0,$$

et donc $GX = 0$.

Comme G est inversible, on a donc $X = 0$, puis la liberté de la famille.

- b) i. Comme en 3a, le terme proposée est la i -ième ligne du vecteur GX , et donc est nul.
ii. Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a donc

$$\left\| \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\|^2 = 0,$$

et donc $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0$.

- iii. Par liberté, on a donc tous les α_k qui sont nuls, et donc $X = 0$.
Le système $GX = 0$ est donc de Cramer, et donc G est inversible.

4. a) Par bilinéarité du produit scalaire, on a directement le résultat.

b) On a donc pour tous i et j

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2 \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} .$$

c) On a donc $A = J + I_n$, et donc

$$A^2 = J^2 + I_n + 2J = (n+2)J + I_n.$$

On a alors

$$A^2 = (n+2)A - (n+1)I_n,$$

et donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{-1}{n+1}A + \frac{n+2}{n+1}I_n.$$

d) La matrice G est donc inversible, donc la famille $v_1, \dots, v_n$ est libre par la question 3a. Comme elle comporte n vecteurs en dimension n c'en est donc une base.