15 Géométrie et produits scalaires

15.1 Rappels de géométrie dans le plan et l'espace

On notera $\mathcal{P}$ le plan euclidien, et $\mathcal{E}$ l'espace euclidien.

Définition 15.1

On appelle *droite* la donnée de

- un vecteur u, appelé vecteur directeur
- un point A

La droite est alors l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad u \text{ sont colinéaires.}$$

On note (AB) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A. On a donc

$$(AB) = \{M \in \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}\}.$$

Si le réel λ est limité à $[0, 1]$, on parle alors de *segment* $[AB]$.

Proposition 15.2 – Représentation paramétrique d'une droite du plan

Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a, b)$ passant par $A(x_A, y_A)$. Alors un point $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}$$

Proposition 15.3 – Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit (d) une droite de vecteur directeur $u = (a, b, c)$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un point

$M(x, y, z)$ appartient à la droite si et seulement si

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Proposition 15.4 – Équation cartésienne d'une droite du plan

Soit (d) la droite de vecteur directeur u passant par $A(x_A, y_A)$. Soit $v = (a, b)$ un vecteur orthogonal à u. Alors un point $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_B) = 0.$$

Définition 15.5

Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $R > 0$. On appelle *cercle de centre Ω et de rayon R* l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = R\}.$$

Proposition 15.6 – Équation paramétrique du cercle

Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M(x_\Omega + R\cos\theta, y_\Omega + R\sin\theta) \mid \theta \in]-\pi, \pi]\}.$$

Proposition 15.7 – Équation implicite du cercle

Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $R > 0$. Alors

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2\}.$$

Réciproquement, toute courbe d'équation implicite $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec $a^2 + b^2 \geqslant 4c$ est une équation de cercle.

Définition 15.8

Un plan de l'espace P est défini par deux vecteurs non colinéaires et un point A. Plus précisément, si u, vv sont des vecteurs et A un point, alors

$$P = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda u + \mu v\}.$$

Proposition 15.9 – Représentation paramétrique d'un plan

Soit P le plan de vecteurs directeurs $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$. Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

Proposition 15.10 – Équation cartésienne d'un plan

Soit P le plan de vecteurs directeurs u et v passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

Soit $w = (a, b, c)$ un vecteur orthogonal au plan.

Alors un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

15.2 Produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette section, on travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$.

15.2.1 Produits scalaires

Définition 15.11

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une forme bilinéaire si :

- $\forall v \in E,\ u \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v, w \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(u + \lambda w, v) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(w, v).$$

- $\forall u \in E,\ v \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v, w \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(u, v + \lambda w) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, w).$$

Une fonction qui vérifie le premier point est dite *linéaire à gauche*, et une fonction qui vérifie le second point est dite *linéaire à droite*.

EXEMPLE : L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y),(u,v) & \longmapsto & xu + yv \end{array}$$

est bilinéaire. En effet, soient $(x,y),(u,v)(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On a

$$\begin{aligned} \varphi((x,y) + \lambda(a,b),(u,v)) &= \varphi((x+\lambda a, y + \lambda b),(u,v)) \\ &= (x+\lambda a)u + (y+\lambda b)v \\ &= xu + \lambda au + yv + \lambda bv \\ &= \varphi((x,y),(u,v)) + \lambda\varphi((a,b),(u,v)) \end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned} \varphi((x,y),(u,v) + \lambda(a,b)) &= \varphi((x,y),(u+\lambda a, v+\lambda b)) \\ &= x(u+\lambda a) + y(v+\lambda b) \\ &= xu + \lambda ax + yv + \lambda by \\ &= \varphi((x,y),(u,v)) + \lambda\varphi((x,y),(a,b)) \end{aligned}$$

Définition 15.12

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si

$$\forall u,v \in E,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u).$$

EXEMPLE : L'application définie précédemment est symétrique.

NOTA : Pour montrer qu'une application est une forme bilinéaire symétrique, il n'y a besoin de montrer que la linéarité à gauche ou à droite, et la symétrie prouvera la linéarité par rapport à l'autre variable.

Les formes bilinéaires symétriques se comportent comme des produits :

Proposition 15.13

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors :

- $\forall u \in E,\ \varphi(u,0) = \varphi(0,u) = 0$
- $\forall u,v \in E,\ \varphi(u+v,u+v) = \varphi(u,u) + 2\varphi(u,v) + \varphi(v,v)$.

Démonstration. Soit $u \in E$. Alors $v \mapsto \varphi(u,v)$ est linéaire, donc envoie 0 sur 0.

Si $u, v \in E$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(u+v, u+v) &= \varphi(u+v, u) + \varphi(u+v, v) && \text{par linéarité à droite} \\ &= \varphi(u,u) + \varphi(v,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,v) && \text{par linéarité à gauche} \\ &= \varphi(u,u) + 2\varphi(u,v) + \varphi(v,v) && \text{par symétrie}\end{aligned}$$

□

Définition 15.14 – Produit scalaire

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est un *produit scalaire sur* E si

- φ est une forme bilinéaire
- φ est symétrique
- φ est définie positive, *i.e.*

$$\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Les notations usuelles pour les produits scalaires sont $\langle u, v\rangle$, $(u \mid v)$, $u \cdot v$.

EXEMPLE : L'application des exemples précédents est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a déjà vu qu'elle était bilinéaire symétrique, et si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi((x,y),(x,y)) = x^2 + y^2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $x = y = 0$.

NOTA : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. S'il est de plus de dimension finie, on parle d'*espace euclidien*.

On peut en fait généraliser l'exemple précédent à tout E :

Proposition-Définition 15.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur E, appelé *produit scalaire canonique*.

NOTA : On remarque que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve le produit scalaire usuel dans le plan et dans l'espace.

NOTA : On note que si on voit u et v comme des vecteurs colonnes, on a en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$:

$$\langle u, v\rangle = u^{\mathsf{T}} \times v.$$

Démonstration. Montrons que l'application est linéaire à gauche : soient $u, v, w \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle u+\lambda v, w\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (u_k + \lambda v_k) w_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k w_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \\ &= \langle u, w\rangle + \lambda \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'elle est symétrique : soient $u, v \in E$.

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k u_k \\ &= \langle v, u\rangle \end{aligned}$$

Montrons qu'elle est définie positive : soit $u \in E$.

$$\langle u, u\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si tous les u_k sont nuls, *i.e.* $u = 0$.

$\square$

Théorème 15.16 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors

$$\forall u, v \in E,\ \langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle.$$

De manière équivalente,

$$\forall u, v \in E,\ |\langle u, v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

De plus, on a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

NOTA : On remarque que ce résultat ressemble à celui du même nom vu pour la covariance. On va en effet faire une démonstration très similaire.

Démonstration. Si u ou v est nul, le résultat est trivial. Supposons donc $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle.$$

Par positivité du produit scalaire, on a bien $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0$, et par bilinéarité, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2\langle u, u \rangle + 2t\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

f est donc un trinôme du second degré, qui est toujours positif ; son discriminant est donc négatif :

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle\langle v, v \rangle \leqslant 0.$$

On retrouve l'inégalité cherchée.

Supposons maintenant qu'on a l'égalité. Le trinôme f a donc une unique racine ; on la note a. Mais alors $f(a) = \langle au + v, au + v \rangle = 0$, et donc $au + v = 0$. Donc u et v sont colinéaires.

Inversement, si u et v sont colinéaires, on peut écrire par exemple $u = \lambda v$. Dans ce cas

$$\varphi(u, v)^2 = \lambda^2\varphi(u, u)^2 = \varphi(u, u)\varphi(\lambda u, \lambda u).$$

□

15.2.2 Norme

Dorénavant, on suppose qu'on a un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E.

Définition 15.17

La *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'application

$$\| \cdot \| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ u & \longmapsto & \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{array}.$$

Corollaire 15.18 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit donc

$$\forall u, v \in E,\ |\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|\|v\|.$$

EXEMPLE : La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ est bien la norme euclidienne usuelle dans le plan :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition 15.19

Soit $u \in E$. Alors

- $\forall \lambda \in R,\ \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Démonstration. Ces deux propriétés viennent directement de celles du produit scalaire :

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \|u\|^2} = |\lambda| \|u\|.$$

Si $u = 0$, il est clair que $\|u\| = 0$. Si $\|u\| = 0$, alors $\langle u, u \rangle = 0$, et donc $u = 0$. □

Proposition 15.20 – Inégalité triangulaire (de Minkowski)

Soient $u, v \in E$. Alors

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Démonstration. Tous les termes sont positifs, et on compare donc plutôt les carrés.

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\
&= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\| \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$

□

Définition 15.21

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est unitaire s'il est de norme 1.

Si $u \in E$ est non nul, on appelle *normalisé* de u le vecteur unitaire $\frac{1}{\|u\|} u$.

15.2.3 Vecteurs orthogonaux

On rappelle qu'on travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 15.22

Soient u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$.

On note alors $u \perp v$.

NOTA : On note que la notion d'orthogonalité dépend donc du produit scalaire choisi.

NOTA : On note que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

EXERCICE : Montrer que la réciproque est vraie : si un vecteur est orthogonal à tous les autres vecteurs, alors c'est le vecteur nul.

On peut alors écrire le célèbre théorème :

Théorème 15.23 – de Pythagore

Soient u et v dans E.

Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Dans le cas de plus de deux vecteurs, un seul sens reste vrai :

Théorème 15.24 – de Pythagore

Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E deux à deux orthogonaux. On a alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2.$$

Définition 15.25

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G :

$$\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ \langle f, g \rangle = 0.$$

Proposition-Définition 15.26

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *orthogonal de F*, noté $F^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à F.

15.3 Bases orthonormées, matrices symétriques

Proposition 15.27

Soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs non nuls de E. Si les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux, alors la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.

Démonstration. Supposons donc que les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux. Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0.$$
Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Alors par bilinéarité du produit scalaire, et les vecteurs étant deux à deux orthogonaux, on a donc
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i, u_j \rangle = 0, \text{ puis } a_j \|u_j\|^2 = 0.$$
Le vecteur u_j étant non nul, sa norme aussi, et donc $a_j = 0$.

Ceci étant vrai pour tout j, on a bien la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_j)$. □

Définition 15.28

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base orthogonale* de E si tous les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.

On dit que $\mathcal{B}$ est une *base orthonormée* si c'est une base orthogonale, et que tous les e_i sont de norme 1.

NOTA : D'après la propriété précédente, une base orthogonale est toujours libre, et donc est bien une base.

Théorème 15.29

Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire admet une base orthonormée.

On note que dans une base orthonormée, les coefficients d'un vecteur sont donnés par des produits scalaires.

Plus précisément, si u est un vecteur de E, on peut l'écrire
$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$
Mais en prenant le produit scalaire par e_i, on obtient
$$\langle u, e_i \rangle = \alpha_i.$$

On a donc, dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$,

$$u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k.$$

On peut alors décomposer les vecteurs de E

Proposition 15.30

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = u + v$.

Démonstration. Soit alors $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F. On démontre le résultat par analyse-synthèse.

- Supposons donc $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$.

  On peut alors décomposer $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$.

  Mais on a pour tout k
  $$\langle u, e_k \rangle = \langle u, e_k \rangle + \langle v, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle.$$

  Ainsi, on a nécessairement $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$, et $v = x - u$, ce qui montre l'unicité.

- Si on prend de tels u et v, on a bien $x = u + v$ et $u \in F$.

  On a alors pour tout k :
  $$\langle v, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle u, e_k \rangle = 0,$$

  et on a bien $v \in F^{\perp}$.

$\square$

Les matrices de changement de bases ont alors une propriété intéressante :

Proposition 15.31

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ vérifie $P^{-1} = P^{\mathbf{T}}$.

Démonstration. Notons $x_{i,j}$ les coordonnées dans la base canonique du vecteur e_i. Soient alors $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a alors, par produit matriciel

$$(PP^{\mathbf{T}})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} x_{j,k} = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc bien $PP^{\mathsf{T}} = I_n$. □

Considérons alors deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Soient alors u et v deux vecteurs de E, qu'on exprime dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$$

On a alors par bilinéarité

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Ainsi :

Proposition 15.32

On peut calculer le produit scalaire (et donc la norme) en utilisant les coordonnées dans n'importe quelle base orthonormée.

Plus précisément, si u et v sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ dans une base orthonormée quelconque, alors

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = ({}^{\mathsf{T}} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u) \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} v.$$

On peut alors étudier les matrices symétriques :

Proposition 15.33

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On suppose qu'il existe deux vecteurs propres U et V respectivement associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ.

Alors u et v sont orthogonaux.

Démonstration. Alors d'un côté

$$\begin{aligned} \lambda \langle U, V \rangle &= \langle AU, V \rangle \\ &= ({}^{\mathsf{T}} AU) V \\ &= U^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} V \\ &= U^{\mathsf{T}} AV \\ &= \mu U^{\mathsf{T}} V \\ &= \mu \langle U, V \rangle \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on a bien $\langle U, V\rangle = 0$. □

On a alors le théorème suivant :

Théorème 15.34 – spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Plus précisément, pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$P^{-1} = P \quad \text{et} \quad A = PDP^{\mathsf{T}}.$$

Nota : Attention, ce résultat est faux pour les matrices complexes. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est bien symétrique, mais n'admet que 0 comme valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 1, et n'est donc pas diagonalisable.

15.4 Distances et projection orthogonale

On travaille toujours dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans cette partie, on confondra les points de l'espace avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 15.35

Soient u et v deux vecteurs de E. On appelle *distance de u à v* le réel positif

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}.$$

On peut alors définir la distance entre un point et une partie de l'espace.

Définition 15.36

Soient $u \in E$ et A une partie* de E. On appelle *distance de u à A* la borne inférieure des distances de v à un point de A :

$$d(v, A) = \inf\{d(v, v) \mid v \in A\}.$$

Nota : Cette distance n'est pas nécessairement atteinte.

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel de E, on peut plus facilement calculer cette distance. On a pour cela besoin de généraliser la notion de projection orthogonale.

*. A n'étant pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.

Définition 15.37

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle alors *projection orthogonale* sur F tout endomorphisme p tel que :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in F^{\perp},\ p(u+v) = u.$$

NOTA : On note que c'est équivalent à dire que

- pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$
- pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $p(x) - x$ et y sont orthogonaux.

On a alors

Théorème 15.38

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F.

Il existe une unique projection orthogonale sur F, définie par

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \end{array}.$$

Démonstration. On note que cet endomorphisme est bien une projection orthogonale sur F : si $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$, on a bien

$$p(u+v) = \sum_{k=1}^{n} \langle u+v, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k = u.$$

Reste alors à montrer l'unicité.

Soit $q \in \mathcal{L}(E)$ une projection orthogonale sur F. Soit $u \in E$. Comme $q(u)$ est dans F, il existe donc des réels λ_k tels que

$$q(u) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k.$$

Les e_k étant dans F, on a donc pour tout k :

$$\langle q(u) - u, e_k \rangle = \lambda_k - \langle u, e_k \rangle = 0,$$

et on retrouve bien les coefficients de p.

Donc $q = p$, et on a donc bien unicité de la projection orthogonale. □

EXERCICE : Soit $v \in E$ non nul.

Donner l'expression de la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(v)$.

Les projections orthogonales ont alors des propriétés intéressantes :

Proposition 15.39

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit p la projection orthogonale sur F. Alors

- $p \circ p = p$
- $\operatorname{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}) = F$
- $\ker(p) = F^{\perp}$.

Démonstration.

- Il suffit de noter que pour tout $v \in F$, on a $p(v) = v$: c'est vrai pour tous les vecteurs de la base orthonormée de F.

  Comme pour tout $u \in E$, $p(u) \in F$, on a donc bien $p(p(u)) = p(u)$.

- Soit donc $v \in \operatorname{Im}(p)$: il existe un $u \in E$ tel que $v = p(u)$. Montrons que $p(v) - v = 0$.

  On a $p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$, et donc on a bien $v \in \ker(p - \mathrm{id})$.

  Soit maintenant $u \in \ker(p - \mathrm{id})$. On a donc $p(u) = u$. D'après la définition de projection orthogonale, on a donc $u \in F$.

  Enfin, soit $u \in F$. On peut décomposer u sur une base orthonormée de F : $u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i$. On a alors par bilinéarité du produit scalaire

$$p(u) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{m} u_i e_i, e_k \right\rangle e_k = u.$$

  On a donc bien $u \in \operatorname{Im}(p)$.

- Soit $u \in \ker(p)$. On va montrer que u est orthogonal à tous les vecteurs d'une base orthonormée de F. On a alors

$$p(u) = \sum_{k=1}^{m} \langle u, e_k \rangle e_k = 0.$$

  La famille (e_k) étant libre, les coefficients $\langle u, e_k \rangle$ sont donc tous nuls, et on a bien $u \in F^{\perp}$.

  Réciproquement, si $u \in F^{\perp}$, alors $\langle u, e_k \rangle = 0$ et donc $p(u) = 0$.

□

Corollaire 15.40

On a $\dim F + \dim(F^{\perp}) = n$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 15.41

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit p la projection orthogonale sur F. On a alors pour tout $u \in E$

- $d(u, F) = d(u, p(u))$
- Pour tout $f \in F$, on a
$$d(u, f)^2 = d(p(u), f)^2 + d(u, F)^2,$$
et en particulier
$$d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

NOTA : On note que d'après la dernière égalité, on a pour tout vecteur u : $\|p(u)\| \leqslant \|u\|$.

Une application célèbre de ce théorème est la détermination de la droite des moindres carrés.

On se fixe un ensemble de points $P_i(x_i, y_i)$ du plan $\mathbb{R}^2$, et on cherche une droite qui minimise la somme des carrés des écarts entre les points et la droite. Si la droite a pour équation $y = ax + b$, on veut donc minimiser la quantité
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Soient alors les vecteurs de $\mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} X &= (x_1, \ldots, x_n) \\ Y &= (y_1, \ldots, y_n) \\ U &= (1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

On définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ $F = \mathrm{Vect}(X, U)$.

Alors, pour tout vecteur $W \in F$, il existe a et b tel que $W = aX = bU$, et donc
$$d(Y, W)^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

On cherche donc à minimiser la quantité $d(Y, W)$, qui doit alors être minimale pour $W = p(Y)$, où p est la projection orthogonale sur le plan F.

Comme $W = p(Y)$ est dans F, on peut l'écrire sous la forme $aX + bU$, et on doit donc trouver a et b tels que
$$\langle W - Y, X \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle W - Y, U \rangle = 0.$$

On obtient alors le système linéaire
$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i & = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + nb & = \sum y_i \end{cases}$$

qu'il suffit de résoudre pour trouver la droite de régression.

15.5 Exercices

Exercice 1

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer les identités suivantes pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$:

1. $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$
2. $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$
3. $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

Réponse de l'exercice

Dans les trois cas, il suffit de développer la norme $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^{\mathbf{T}}A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que les valeurs propres de $A^{\mathbf{T}}A$ sont toutes positives.
3. Montrer que si A est non nulle, alors $A^{\mathbf{T}}A$ possède une valeur propre strictement positive.

Réponse de l'exercice

1. On a $(A^{\mathbf{T}}A)^{\mathbf{T}} = A^{\mathbf{T}}A$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A^{\mathbf{T}}A)$, et soit X un vecteur propre associé. On a alors
$$X^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}}AX = \lambda X^{\mathbf{T}}X,$$
et donc $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$.
Comme $\|X\| \neq 0$, on a bien $\lambda \geqslant 0$.
3. Si A est non nulle, alors on montre facilement que $A^{\mathbf{T}}A$ est non nulle. Comme elle est diagonalisable, elle admet au moins une valeur propre. Si elle étaient toutes nulles, alors on aurait $A^{\mathbf{T}}A = 0$, ce qui est impossible.

Exercice 3

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Réponse de l'exercice

De même que dans l'exercice précédent, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz entre les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$.

Exercice 4

Dans les cas suivants, justifier que A est diagonalisable, et trouver une matrice P telle que $P^{\mathrm{T}}AP$ soit diagonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse de l'exercice

Les trois matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables. On a alors

a) $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

c) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_a(x) = \langle x, a \rangle$$

1. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Étude d'un exemple.

   On pose dans cette question (uniquement) : $a = (1, 2, \ldots, n)$.

   Expliciter f_a et donner une base de son noyau.

   Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(f_a)$?
3. Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, montrer que : $f_a = f_b \iff a = b$.

4. Lorsque $a \neq 0$, quel est le rang de f_a ? En déduire la dimension de $\ker(f_a)$ lorsque $a \neq 0$.
5. On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

   Écrire la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver les résultats des questions 3 et 4.
6. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

   Montrer : $x = y \iff \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$
7. Soient a et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

   Écrire un programme Python qui calcule $f_a(x)$ et qui teste si un vecteur x est dans le noyau de f_a.
8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

   Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$ et que ce a est donné par $a = \sum_{k=1}^{n} g(e_k)\, e_k$.
9. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On admet que cet ensemble, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   a) Montrer que $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

   b) En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie, préciser sa dimension et donner une base.

Réponse de l'exercice

1. f_a est une application linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire.
2. On a dans ce cas
$$f_a \colon (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} i x_i.$$
   On a alors
$$\begin{aligned} x \in \ker(f_a) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k x_k = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$
   où u_i est le vecteur dont la première coordonnée vaut $-i$, la i-ième vaut 1 et toutes les autres sont nulles. Cette famille est une base de $\ker(f_a)$, qui est donc de dimension $n-1$.
3. Le sens réciproque est trivial. Supposons donc $f_a = f_b$. On a alors pour tout x
$$\langle x, a \rangle = \langle xb \rangle,$$
   et donc $\langle x, a - b \rangle = 0$. En posant $x = a - b$, on obtient $a = b$.
4. On note que le rang de f_a ne peut être que 0 ou 1. Si $a \neq 0$, on a $f_a(a) \neq 0$ et donc $f_a \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(f_a) = 1$. Par théorème du rang, on a donc $\dim \ker f_a = n - 1$.

5. On a $\operatorname{mat} f_a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Ainsi, si a est non nul, on a bien $\operatorname{rg} f_a = rg \operatorname{mat} f_a = 1$, et
$$f_a = f_b \Leftrightarrow \operatorname{mat} f_a = \operatorname{mat} f_b \Leftrightarrow a = b.$$

6. Le sens direct est trivial. Supposons donc $\forall a \in \mathbb{R}^n,\ f_a(x) = f_a(y)$. Alors pour tout vecteur a, $\langle x - y, a \rangle = 0$, et donc $x = y$.

7. On propose le code

```python
def inKer(a,x):
    ps = sum([a[i]*x[i] for i in range(len(a))])
    return ps==0

```

8. Soit donc $a = \sum_{k=1}^{n} g(e_k)e_k$. Alors pour tout i
$$f_a(e_i) = \sum_{k=1}^{n} g(e_k)\langle e_k, e_i \rangle = g(e_i).$$
Ainsi, f_a et g coïncident sur une base, et donc sont égales.
Si on avait de plus $g = f_b$, alors $f_a = f_b$ et donc $a = b$ par la question 3. On a donc bien l'unicité.

9. a) Il est clair que ϕ est linéaire. De plus, la question 8 montre qu'elle est bijective.
   b) On a donc $\dim \mathcal{L}(R^n, R) = n$, et une base est $(f_{e_1}, \ldots, f_{e_n})$.

Exercice 6 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$. On considère un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E.

On cherche dans cet exercice un algorithme pour trouver une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_n)$ de E, telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ et $\langle u_i, e_i \rangle > 0$.

1. Que vaut nécessairement u_1 ?

2. On veut construire u_2. On note p_1 la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u_1)$.
   a) Montrer que $v_2 = e_2 - p_1(e_2)$ est orthogonal à u_1.
   b) En déduire un vecteur u_2 qui convient.

3. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'on a construit $u_1, \ldots, u_k$. On note alors p_i la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u_i)$.
   a) Montrer que $v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} p_i(e_{k+1})$ est orthogonal à tous les u_i, $i \in [\![1, k]\!]$.
   b) En déduire un vecteur u_{k+1} qui convient.

4. Conclure.

5. On considère la base $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,1), (1,1,1), (-1,-1,0))$ de $\mathbb{R}^3$. Construire une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire canonique, et vérifiant les conditions précédentes.

Réponse de l'exercice

1. On a nécessairement $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. a) Par définition de projection orthogonale, on a bien $\langle v_2, u_1\rangle = 0$.

   b) Posons alors $u_2 = \frac{e_2 - p_1(e_2)}{\|e_2 - p_1(e_2)\|}$. Alors u_2 est bien orthogonal à u_1, de norme 1, avec $u_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ et
   $$\langle v_2, e_2\rangle = \|e_2\|^2 - \langle u_1, e_2\rangle^2 > 0$$
   par inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. a) Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$. On a
   $$\begin{aligned}\langle v_{k+1}, u_i\rangle &= \langle e_{k+1} - p_i(e_{k+1}), u_i\rangle - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \langle p_j(e_{k+1}), u_i\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$
   car pour tout $j \neq i$, $p_j(e_{k+1}) \in \text{Vect}(u_j)$ et donc $p_j(e_{k+1})$ est orthogonal à u_i.

   b) On pose alors $u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, qui est bien orthogonal à tous les u_i déjà construits, de norme 1, et dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$.
   De plus,
   $$\begin{aligned}\langle v_{k+1}, e_{k+1}\rangle &= \left\langle v_{k+1}, v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} p_i(e_{k+1})\right\rangle \\ &= \|v_{k+1}\|^2 \\ &> 0\end{aligned}$$
   par inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Par récurrence (finie), on a donc bien construit une base orthonormale vérifiant les conditions voulues.
5. On pose donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. On calcule ensuite
   $$p_1(e_2) = \langle e_2, u_1\rangle u_1 = (1, 0, 1),$$
   puis $v_2 = e_2 - p_1(e_2) = (0, 1, 0)$ et enfin $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0, 1, 0)$.
   Pour finir, on calcule
   $$p_1(e_3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad p_2(e_3) = (0, -1, 0).$$
   On pose alors $v_3 = e_3 - p_1(e_3) - p_2(e_3) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, puis $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

Exercice 7

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que sont équivalentes

(i) $\ker(q) \subseteq \ker(p)$

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$.

Réponse de l'exercice

Montrons le sens direct. On suppose donc $\ker(q) \subseteq \ker(p)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En écrivant

$$x = q(x) + x - q(x),$$

on obtient $p(x) = p(q(x)) + p(x - q(x))$. Or $x - q(x) \in \ker(q) \subseteq \ker(p)$, et donc $p(x) = p(q(x))$.

On a alors $\|p(x)\| = \|p(q(x))\| \leqslant \|q(x)\|$.

Pour le sens réciproque, en supposant l'inégalité, on a pour $x \in \ker(q)$, $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\| = 0$, et donc $x \in \ker p$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Pour une partie F de E, on définit $F^\perp = \{u \in F \mid \forall v \in F,\ \langle u \mid v \rangle = 0\}$.

1. Écrire une fonction Python calculant le produit scalaire de deux vecteurs.

2. Soit f un endomorphisme de E.

   On définit l'adjoint de f, noté f^* par :

   $$\forall u \in E,\ f^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u \mid f(e_i) \rangle e_i.$$

   Montrer que pour tous u et v dans E, $\langle u \mid f(v) \rangle = \langle v \mid f^*(u) \rangle$.

3. Compléter la fonction suivante qui calcule $f^*(u)$.

```python
import numpy as np

def adjoint(f,u):
    n=len(u)
    res=...
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[...] = 1
        res += ...
    return res

```

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormée de F.

   Soit $\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ v & \longmapsto & (\langle u_1 \mid v \rangle, \dots, \langle u_p \mid v \rangle) \end{array}$.

   a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

   b) Soit $v \in E$. Montrer que $v \in F^\perp$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \langle u_k \mid v \rangle = 0$.

   c) Montrer que ϕ est surjective.

   d) Montrer que $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$.

5. Montrer que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)^{\mathbf{T}}$.

6. On suppose que $f = f^*$.

   a) Montrer que f est diagonalisable.

   b) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$ et $\ker(f)^\perp = \mathrm{Im}(f)$.

Réponse de l'exercice

1. On a

```
import numpy as np

def ps(u,v):
    res = 0
    n = len(u)
    for i in range(n):
        res = res + u[i]*v[i]
    return res

```

2. Soient u et v deux vecteurs de E. On a alors

$$\begin{aligned}\langle v \mid f^*(u)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle u \mid f(e_i)\rangle \langle v \mid e_i\rangle \\ &= \left\langle u \mid f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v \mid e_i\rangle e_i\right)\right\rangle \\ &= \langle u \mid f(v)\rangle\end{aligned}$$

   la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée.

3. On propose

```
def adjoint(f,u):
    n=len(u)
    res=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[i] = 1
        res += ps(u,f(e))*e
    return res

```

4. a) Il est clair que $F^\perp \subseteq E$ et que $0 \in F^\perp$. Soient alors $u, v \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit alors $w \in F$. On a par bilinéarité

   $$\langle u + \lambda v \mid w\rangle = \langle u \mid w\rangle + \lambda\langle v \mid w\rangle = 0.$$

   Ainsi, $u + \lambda v \in F^\perp$ qui est bien un sous-espace vectoriel de E.

   b) Les u_k étant dans F, le sens direct est trivial.
   Supposons donc que $\langle u_k \mid v\rangle = 0$ pour tout k. Soit $u \in F$, qu'on peut décomposer dans la base : $u = \sum a_i u_i$. Alors

   $$\langle v \mid u\rangle = \sum a_i \langle v, u_i\rangle = 0,$$

   et donc $v \in F^\perp$.

c) On note qu'en calculant les $\phi(u_i)$, on obtient tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et donc ϕ est surjective.

d) Par 4b, on a $\ker(\phi) = F^\perp$, et par 4c, on a $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^p$. Par le théorème du rang, on a donc

$$n = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(F^\perp) + \dim(F),$$

et on retrouve le résultat demandé.

5. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, le i-ième coefficient dans la base $\mathcal{B}$ de $f(e_j)$ est $\langle f(e_j) \mid e_i \rangle = \langle e_j \mid f^*(e_i) \rangle$.
   On a donc bien l'égalité voulue.

6. a) On a alors $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{mat}_\mathcal{B}(f)^\mathbf{T}$, et donc cette matrice est symétrique réelle, et donc diagonalisable par le théorème spectral.
   Donc f est diagonalisable.

   b) Soit $x \in \ker(f)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, $y = f(u)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x \mid y \rangle &= \langle x \mid f(u) \rangle \\ &= \langle f^*(x) \mid u \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

car $f = f^*$ et $f(x) = 0$.
Or par théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)^\perp),$$

et on a bien l'égalité voulue.
Soit maintenant $v \in \mathrm{Im}(f)$, qu'on peut écrire $v = f(u)$. Soit $x \in \ker(f)$. On a alors

$$\langle v \mid x \rangle = \langle f(u) \mid x \rangle = \langle u \mid f(x) \rangle = 0,$$

et donc $v \in \ker(f)^\perp$.
De même, on a égalité des dimensions, et donc l'égalité voulue.