1 Généralités sur les ensembles et les fonctions. Nombres complexes

1.1 Théorie naïve des ensembles

1.1.1 Généralités

On considèrera souvent dans ce cours des *ensembles* ; on pourra visualiser un ensemble comme une "collection" d'objets mathématiques.

On écrira alors $x \in E$ pour indiquer que l'objet x est un des objets de la collection E, et on dira que *x appartient à E*.

Il y a trois façons différentes de décrire des ensembles :

- En listant explicitement ses éléments, entre accolades et séparés par des virgules ou points-virgules

  > **Exemple :** $A = \{1, 2, 3\}$ ou $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

- En listant ses éléments comme l'image d'un ensemble par une fonction

  > **Exemple :** $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ou $C = \{f' \mid f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})\}$

- En donnant une propriété qui caractérise ses éléments

  > **Exemple :** $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$ ou $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ premier}\}$.

Un ensemble particulier, appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$, sera l'ensemble qui ne contient aucun élément. On admet qu'il est unique.

Définition 1.1

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A est inclus dans B, noté $A \subseteq B$ si tout élément de A est élément de B :

$$\forall x \in A,\ x \in B.$$

On dit que A et B sont égaux s'ils sont inclus l'un dans l'autre :

$$\forall x \in A,\ x \in B \text{ et } \forall x \in B,\ x \in A.$$

1.1.2 Opérations sur les ensembles

Étant donnés des ensembles, on peut en construire d'autres avec des opérations.

Définition 1.2

Soient A et B deux ensembles inclus dans un ensemble E.

On appelle *intersection de A et B*, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

On appelle *union de A et B*, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B (ou les deux) :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On généralisera facilement à l'intersection ou l'union de plus de deux ensembles.

Définition 1.3

Soient A et E deux ensembles, avec $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E*, noté $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Si B n'est pas nécessairement inclus dans A, on note $A \backslash B$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Définition 1.4

Soient A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien de A et B*, noté $A \times B$, l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le second dans B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

De même, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

NOTA : Attention à ne pas confondre le *couple* (a, b), élément d'un produit cartésien, ou l'ordre des élément est important, et la *paire* $\{a, b\}$ qui est un ensemble de deux éléments, dont l'ordre n'importe pas ; en toute généralité, on a

$$(a, b) \neq (b, a), \text{ mais } \{a, b\} = \{b, a\}.$$

1.2 Généralités sur les fonctions

Les mathématiques utilisent principalement la notion de *fonctions*.

Définition 1.5

On appelle *application* (ou fonction) tout objet mathématique f défini par :

- Son ensemble de départ E
- Son ensemble d'arrivée F
- Son graphe, *i.e.* pour tout élément $x \in E$ un et un seul élément de $y \in F$.

On notera alors $f(x)$ l'élément y de F correspondant à $x \in E$. $f(x)$ s'appelle l'image de x, et x s'appelle un[*] antécédent de y.

On note une telle application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Définition 1.6

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *composée de f et g* l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Définition 1.7

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors

*. Attention, il n'est pas nécessairement unique

- on appelle *image directe* de A par f l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

- on appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

On a alors trois propriétés des fonctions importantes :

Définition 1.8

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est *injective* (ou que f est une *injection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

- On dit que f est *surjective* (ou que f est une *surjection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

- On dit que f est *bijective* (ou que f est une *bijection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet exactement un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

On peut aussi caractériser la bijectivité par l'existence d'une réciproque :

Proposition 1.9

Une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Dans ce cas, g s'appelle *réciproque* de f et se note f^{-1}.

1.3 Nombres complexes

Nous allons dans cette section rappeler quelques propriétés des nombres complexes. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient un élément i vérifiant $i^2 = -1$, et tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! a, b \in \mathbb{R},\ z = a + ib.$$

Dans ce cas, a s'appelle *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$, et b s'appelle *partie imaginaire* de z, notée $\Im(z)$ ou $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 1.10

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, $a, b \in \mathbb{R}$.

On appelle *conjugué de z* le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

On appelle *module de z* le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Les nombres complexes de module 1 peuvent tous s'écrire sous la forme

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.11

Dans ce cas, θ s'appelle *argument de z*. Cet argument n'est pas unique.

Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle *argument de z* tout argument de $\frac{z}{|z|}$.

On rappelle alors les formules d'Euler et de Moivre :

Théorème 1.12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{(Formule d'Euler).}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{(Formule de Moivre).}$$

Ces deux formules peuvent notamment être utilisées pour linéariser ou délinéariser des fonctions trigonométriques.

On rappelle enfin le résultat concernant la résolution d'équations du second degré à coefficients réels :

Proposition 1.13

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors les solutions de l'équation d'inconnue z

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont données par, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Signe de Δ	Solutions de l'équation
$= 0$	$\frac{-b}{2a}$
> 0	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
< 0	$\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

1.4 Exercices

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$. Déterminer la composée de f par elle-même n fois en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse de l'exercice

On commence par noter que si $x \in \mathbb{R}^+$, alors on a bien $f(x) \in \mathbb{R}^+$; la composée proposée existe donc bien.

En testant, on conjecture que $f^n : x \mapsto \frac{x}{nx+1}$, formule qu'on démontre simplement par récurrence.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Calculer $f(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f induit une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$.

Réponse de l'exercice

1. Commençons par dresser le tableau de variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$
La fonction est donc décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, \infty[$, et croissante sur $[-1, 1]$.
En particulier, elle atteint son maximum en 1, avec $f(1) = 1$, et donc 2 n'a pas d'antécédent par f.
De même, on note que $\frac{1}{2}$ a deux antécédent par f : $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$, et donc f n'est pas injective.
2. Montrons que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Si $t \in [-1, 1]$, alors l'équation $f(x) = t$ admet bien au moins une solution, car le trinôme $tx^2 - 2x + t = 0$ admet bien au moins une solution.
Inversement, si $t \notin [-1, 1]$, alors $f(x) = t$ est équivalente à $tx^2 - 2x + t = 0$, de discriminant $4 - 4t^2 < 0$, et donc t n'admet pas d'antécédent par f, *i.e.* $t \notin f(\mathbb{R})$.
3. On a déjà vu que sur $[-1, 1]$, f est strictement croissante, donc injective. De plus, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, et donc par théorème des valeurs intermédiaires, tous les réels de $[-1, 1]$ admettent une antécédent par f, et donc f est bijective.

Exercice 3

Soit $f : X \to Y$ une application. Soient
$$\Delta : \begin{array}{ccc} \wp(X) & \longrightarrow & \wp(Y) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \nabla : \begin{array}{ccc} \wp(Y) & \longrightarrow & \wp(X) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

Montrer que sont équivalentes

- f surjective
- Δ surjective
- ∇ injective

Réponse de l'exercice

- Supposons f surjective, et montrons Δ surjective. Soit $B \subseteq Y$. Considérons alors $A = f^{-1}(B)$. Montrons alors que $\Delta(A) = B$.

  Soit donc $y \in \Delta(A)$: il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais on a alors $f(x) \in B$, et donc $y \in B$.

  Réciproquement, soit $y \in B$. Soit alors x un antécédent de y. On a alors $f(x) = y$, et donc $x \in f^{-1}(B)$, et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.
- Supposons Δ surjective. Soient $B, C \subseteq Y$ tels que $\nabla(B) = \nabla(C)$. Soit alors $y \in B$; montrons $y \in C$. Par surjectivité de Δ, il existe une partie A de X telle que $\{y\} = f(A)$. Soit alors $x \in A$. On a donc $y = f(x)$, et donc $x \in f^{-1}(B)$, puis $x \in f^{-1}(C)$. Donc $f(x) = y \in C$.

  L'autre inclusion étant identique, on a bien $B = C$.
- Supposons ∇ injective. Soit $y \in Y$. Supposons que y n'ait pas d'antécédent. Alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, et par injectivité, $\{y\} = \emptyset$, ce qui n'est pas le cas. Donc y admet un antécédent.

Exercice 4

Soient E, F, G non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que

- Si $g \circ f$ injective alors f injective
- Si $g \circ f$ surjective alors g surjective

Réponse de l'exercice

- supposons $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors en composant par g, $g(f(x)) = g(f(y))$, et par injectivité, on a bien $x = y$. Donc f est injecctive.
- supposons $g \circ f$ surjective. Soit alors $y \in G$. Par surjectivité, on a donc un antécédent x de y par $g \circ f$: $g(f(x)) = y$. Mais alors $f(x)$ est un antécédent de y par g, et donc g est surjective.

Exercice 5

Linéariser les expressions suivantes :

- $\sin^2(\theta)$
- $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$
- $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$

Réponse de l'exercice

- $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$
- $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{-1}{16}(\cos(5\theta)+\cos(3\theta)-2\cos(\theta))$
- $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) = \frac{1}{16}(-\sin(5\theta)+\sin(3\theta)+2\sin(\theta))$

Exercice 6

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$(z-1)^n = (z+1)^n.$$

Réponse de l'exercice

Commençons par noter que -1 n'est pas solution.

On a donc

$$\begin{aligned}(z-1)^n = (z+1)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z+1)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}\end{aligned}$$

puisque le cas $k=0$ n'est pas solution.

Il n'y a plus qu'à simplifier en utilisant l'angle moitié :

$$\exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 7

Soient u, v deux nombres complexes de module 1. Montrer que si $2+uv$ est de module 1, alors $uv = -1$.

Que dire de la réciproque ?

Réponse de l'exercice

Supposons alors que $2+uv$ est de module 1. On a

$$\begin{aligned}|2+uv|^2 &= (2+uv)(2+\overline{uv})\\ &= 4+2\overline{uv}+2uv+|u|^2|v|^2\\ &= 5+\frac{2}{uv}+2uv\\ &= 1\end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{1}{uv}+uv = -2,$$

puis

$$(uv+1)^2 = 0.$$

On a donc bien $uv = -1$.

La réciproque est évidemment vraie.

Exercice 8

Soit $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$. Le but est de montrer que α est irrationel, *i.e.* ne s'écrit pas comme une fraction d'entiers.

1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.
2. Montrer que α est rationnel si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1+2i\sqrt{2})^n$ peut s'écrire $a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont deux entiers tels que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
4. Conclure.

Réponse de l'exercice

1. On a
$$e^{i\pi\alpha} = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
2. Supposons α rationnel, avec $\alpha = \frac{p}{q}$, p et q entiers.
On aurait alors
$$\left(e^{i\alpha\pi}\right)^{2q} = e^{2ip\pi} = 1.$$
On a alors
$$(1+2i\sqrt{2})^{2q} = 3^{2q}.$$
Réciproquement, s'il existe un tel n, on a alors un n tel que $e^{i\alpha n\pi} = 1$.
On a alors $\alpha n\pi = 2k\pi$ pour un certain k, et donc α est rationnel.
3. Par récurrence :
   - pour $n = 1$, c'est évident avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 2$.
   - si on a trouvé a_n et b_n, alors
$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2})\\ &= (a_n + ib_n\sqrt{2})(1+2i\sqrt{2})\\ &= a_n - 4b_n + (2a_n + b_n)i\sqrt{2}\end{aligned}$$
   On peut alors poser $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n$. On a alors $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n = -(a_n - b_n) - 6b_n$.
   Comme $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3 mais que $6b_n$ l'est, $a_{n+1} - b_{n+1}$ n'est pas divisible par 3.
4. Si α était rationnel, on aurait alors un certain n pour lequel $a_n + ib_n\sqrt{2} = 3^n$. On aurait alors $a_n = 3^n$ et $b_n = 0$, mais alors $a_n - b_n$ serait divisible par 3, ce qui est impossible.