1 Généralités sur les ensembles et les fonctions. Nombres complexes

1.1 Théorie naïve des ensembles

1.1.1 Généralités

On considèrera souvent dans ce cours des *ensembles* ; on pourra visualiser un ensemble comme une "collection" d'objets mathématiques.

On écrira alors $x \in E$ pour indiquer que l'objet x est un des objets de la collection E, et on dira que *x appartient à E*.

Il y a trois façons différentes de décrire des ensembles :

- En listant explicitement ses éléments, entre accolades et séparés par des virgules ou points-virgules

  Exemple : $A = \{1, 2, 3\}$ ou $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

- En listant ses éléments comme l'image d'un ensemble par une fonction

  Exemple : $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ou $C = \{f' \mid f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})\}$

- En donnant une propriété qui caractérise ses éléments

  Exemple : $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$ ou $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ premier}\}$.

Un ensemble particulier, appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$, sera l'ensemble qui ne contient aucun élément. On admet qu'il est unique.

Définition 1.1

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A est inclus dans B, noté $A \subseteq B$ si tout élément de A est élément de B :

$$\forall x \in A,\ x \in B.$$

On dit que A et B sont égaux s'ils sont inclus l'un dans l'autre :

$$\forall x \in A,\ x \in B \text{ et } \forall x \in B,\ x \in A.$$

1.1.2 Opérations sur les ensembles

Étant donnés des ensembles, on peut en construire d'autres avec des opérations.

Définition 1.2

Soient A et B deux ensembles inclus dans un ensemble E.

On appelle *intersection de A et B*, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

On appelle *union de A et B*, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B (ou les deux) :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On généralisera facilement à l'intersection ou l'union de plus de deux ensembles.

Définition 1.3

Soient A et E deux ensembles, avec $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E*, noté $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Si B n'est pas nécessairement inclus dans A, on note $A \backslash B$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Définition 1.4

Soient A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien de A et B*, noté $A \times B$, l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le second dans B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

De même, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

Nota : Attention à ne pas confondre le *couple* (a, b), élément d'un produit cartésien, ou l'ordre des élément est important, et la *paire* $\{a, b\}$ qui est un ensemble de deux éléments, dont l'ordre n'importe pas ; en toute généralité, on a

$$(a, b) \neq (b, a), \text{ mais } \{a, b\} = \{b, a\}.$$

1.2 Généralités sur les fonctions

Les mathématiques utilisent principalement la notion de *fonctions*.

Définition 1.5

On appelle *application* (ou fonction) tout objet mathématique f défini par :

- Son ensemble de départ E
- Son ensemble d'arrivée F
- Son graphe, *i.e.* pour tout élément $x \in E$ un et un seul élément de $y \in F$.

On notera alors $f(x)$ l'élément y de F correspondant à $x \in E$. $f(x)$ s'appelle l'image de x, et x s'appelle un* antécédent de y.

On note une telle application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Définition 1.6

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *composée de f et g* l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Définition 1.7

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors

*. Attention, il n'est pas nécessairement unique

- on appelle *image directe* de A par f l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

- on appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

On a alors trois propriétés des fonctions importantes :

Définition 1.8

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est *injective* (ou que f est une *injection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

- On dit que f est *surjective* (ou que f est une *surjection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

- On dit que f est *bijective* (ou que f est une *bijection de E dans F*) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet exactement un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

On peut aussi caractériser la bijectivité par l'existence d'une réciproque :

Proposition 1.9

Une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Dans ce cas, g s'appelle *réciproque* de f et se note f^{-1}.

1.3 Nombres complexes

Nous allons dans cette section rappeler quelques propriétés des nombres complexes. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient un élément i vérifiant $i^2 = -1$, et tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! a, b \in \mathbb{R},\ z = a + ib.$$

Dans ce cas, a s'appelle *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$, et b s'appelle *partie imaginaire* de z, notée $\Im(z)$ ou $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 1.10

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, $a, b \in \mathbb{R}$.

On appelle *conjugué de* z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

On appelle *module de* z le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Les nombres complexes de module 1 peuvent tous s'écrire sous la forme

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.11

Dans ce cas, θ s'appelle *argument de* z. Cet argument n'est pas unique.

Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle *argument de* z tout argument de $\frac{z}{|z|}$.

On rappelle alors les formules d'Euler et de Moivre :

Théorème 1.12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{(Formule d'Euler).}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{(Formule de Moivre).}$$

Ces deux formules peuvent notamment être utilisées pour linéariser ou délinéariser des fonctions trigonométriques.

On rappelle enfin le résultat concernant la résolution d'équations du second degré à coefficients réels :

Proposition 1.13

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors les solutions de l'équation d'inconnue z

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont données par, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Signe de Δ	Solutions de l'équation
$= 0$	$\frac{-b}{2a}$
> 0	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
< 0	$\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

1.4 Exercices

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$. Déterminer la composée de f par elle-même n fois en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse de l'exercice

On commence par noter que si $x \in \mathbb{R}^+$, alors on a bien $f(x) \in \mathbb{R}^+$; la composée proposée existe donc bien.

En testant, on conjecture que $f^n : x \mapsto \frac{x}{nx+1}$, formule qu'on démontre simplement par récurrence.

Exercice 2

Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A, B \subseteq E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Réponse de l'exercice

Supposons f injective. Soient alors $A, B \subseteq E$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $y \in f(A) \cap f(B)$.

Soit maintenant $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Par injectivité, $x_1 = x_2$, et donc $x_1 \in A \cap B$, puis $y \in f(A \cap B)$.

Réciproquement, supposons $\forall A, B \subseteq E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\}.$$

$\{x\} \cap \{y\}$ est donc non vide, et donc $x = y$.

Exercice 3

Soit $f : X \to Y$ une application. Soient

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(Y) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \nabla : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}(Y) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(X) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

Montrer que sont équivalentes

- f injective
- Δ injective
- ∇ surjective

Réponse de l'exercice

- Supposons f injective, et montrons Δ injective. Soient donc $A, B \subseteq X$ tels que $\Delta(A) = \Delta(B)$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in \Delta(A)$, et donc $f(x) \in \Delta(B)$: il existe un $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Par injectivité, $x = y$, et donc $x \in B$.

  On a donc bien $A \subseteq B$; de façon symétrique, l'autre inclusion est vraie aussi et donc $A = B$: Δ est injective.

- Supposons maintenant Δ injective, et montrons ∇ surjective. Soit donc $B \subseteq X$. Posons alors $A = f(B)$. Montrons que A est un antédécent de B par ∇, *i.e.* que $f^{-1}(f(B)) = B$. Soit donc $x \in B$. On a alors directement $f(x) \in f(B)$, d'où l'inclusion réciproque.

  Soit maintenant $x \in f^{-1}(f(B))$. On a alors $f(x) \in f(B)$: il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Mais alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$, et donc $\{x\} = \{y\}$, puis $x = y$, et finalement $x \in B$.
- Supposons alors ∇ surjective. Soient $x, y \in X$ avec $f(x) = f(y)$. Par surjectivité, il existe donc un ensemble $B \subseteq Y$ tel que $\{x\} = f^{-1}(B)$, *i.e.*

$$\forall a \in X,\ f(a) \in B \Rightarrow a = x.$$

  Comme $x \in f^{-1}(B)$ car $x \in \{x\}$, on a donc $f(y) = f(x) \in B$, et donc $y = x$.

Exercice 4

Linéariser les expressions suivantes :

- $\sin^2(\theta)$
- $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$
- $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$

Réponse de l'exercice

- $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$
- $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{-1}{16}(\cos(5\theta) + \cos(3\theta) - 2\cos(\theta))$
- $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) = \frac{1}{16}(-\sin(5\theta) + \sin(3\theta) + 2\sin(\theta))$

Exercice 5

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$.

(i) Calculer $\overline{S}$, et en déduire $S + \overline{S}$ et $S\overline{S}$.

(ii) Montrer que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Réponse de l'exercice

On peut commencer par noter que u est une racine 7-ième de l'unité. On a alors $\overline{u} = u^6$.

1. On a alors $\overline{S} = \overline{u} + \overline{u^2} + \overline{u^4}$, et donc
$$\overline{S} = u^6 + u^5 + u^3.$$
On a alors
$$S + \overline{S} = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = -1,$$
et
$$\begin{aligned} S\overline{S} &= (u + u^2 + u^4)(u^6 + u^5 + u^3) \\ &= u^7 + u^6 + u^4 + u^8 + u^7 + u^5 + u^{10} + u^9 + u^7 \\ &= 3 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. S et $\overline{S}$ sont donc les racines du trinôme
$$Z^2 + Z + 2 = 0,$$
et donc S et $\overline{S}$ valent
$$\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$
Il est donc clair que la partie réelle de S est $-\frac{1}{2}$; on retrouve la première inégalité.
Pour la seconde, il faut choisir entre $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.
On note que $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, et donc la partie imaginaire de S doit être positive.
On retrouve ainsi la seconde égalité.

Exercice 6

Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$.

(i) Résoudre l'équation
$$z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0.$$

(ii) On note u et v les solutions de l'équation. Pour quelles valeurs de α a-t-on $|u| = |v| = |u - v|$? Interprétation géométrique ?

Réponse de l'exercice

1. On calcule le discriminant : $\Delta = 2^{2\alpha+2}\cos^2(\alpha) - 2^{2\alpha+2} = -2^{2\alpha+2}\sin^2(\alpha)$.
On a donc deux cas : si $\alpha = 0$, alors le discriminant est nul, et l'unique solution est 2^α, et si $\alpha = \pi$, l'unique solution est -2^α.
Sinon, le discriminant est strictement négatif, et on a deux solutions :
$$u = 2^\alpha\cos(\alpha) + 2^\alpha|\sin(\alpha)|i \quad \text{et} \quad v = 2^\alpha\cos(\alpha) - 2^\alpha|\sin(\alpha)|i.$$

2. On a alors
$$|u| = 2^\alpha \quad \text{et} \quad |v| = 2^\alpha.$$
De plus,
$$|u - v| = 2^{\alpha+1}|\sin(\alpha)|.$$
On a donc l'égalité si et seulement si $|\sin(\alpha)| = \frac{1}{2}$, c'est-a-dire $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
Géométriquement, on a alors un triangle équilatéral.

Exercice 7

Déterminer les complexes tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Réponse de l'exercice

Soit z qui convient.

Comme $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, alors $|z|^2 = 1$, et donc z est de module 1.

On peut donc écrire $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Mais alors

$$z - 1 = e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Donc

$$|z-1| = 2sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et pour avoir $|z-1| = 1$, on a nécessairement

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$.

Réciproquement, $e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ sont bien solutions.