2 Rappels d'analyse

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats d'analyse vus en première année.

2.1 Limites et continuité

Commençons par rappeler les différentes définitions de limite :

Définition 2.1

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et soient a au voisinage de X et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit alors que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a si

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$		Valeur de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$		
		$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Valeur de $a \in \overline{\mathbb{R}}$	$a \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) < M$
	$+\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) < M$
	$-\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) < M$

On rappelle alors que si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

En général, pour montrer l'existence d'une limite, on utilisera soit des limites usuelles, soit des opérations sur les limites usuelles, soit des théorèmes de plus haut niveau.

Proposition 2.2 – Limites usuelles

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a les limites suivantes :

- $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{}$
- $e^{\alpha x} x^\beta \xrightarrow[x\to-\infty]{}$
- $\dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{}$
- $\ln(x)^\alpha x^\beta \xrightarrow[x\to 0]{}$

On ajoutera à ces limites usuelles tous les équivalents de fonctions usuels, qu'on reverra dans la section Développements limités.

Enfin, pour prouver l'existence d'une limite, on peut utiliser les théorèmes suivants :

Théorème 2.3 – de majoration ou minoration

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors
  , et .
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors
  , et .

Théorème 2.4 – d'encadrement des limites

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g, h définies au voisinage de a. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a} h(x) = \ell.$$

Alors si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors

Pour les fonctions monotones, l'existence de limites à gauche et à droite est automatique :

Théorème 2.5 – de la limite monotone

Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit $f \;:\;]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :

-

-
-

Le cas des fonctions décroissantes est analogue.

2.2 Continuité d'une fonction réelle

Définition 2.6

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$. On dit que f est *continue en a* si f admet une limite en a (qui ne peut être que $f(a)$), *i.e.*

On dit qu'une fonction est *continue* sur un ensemble X si

On peut alors parfois étendre l'ensemble de définition d'une fonction par continuité :

Proposition-Définition 2.7

Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I privé d'un point. On dit que f est *prolongeable par continuité* en a si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

-
-

Dans ce cas, la fonction $\hat{f}$ vérifie nécessairement

Pour les fonctions continues, on peut alors utiliser les théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 2.8 – des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $k \in \mathbb{R}$. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \leqslant k$ et $f(b) \geqslant k$, alors

Corollaire 2.9 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors

Théorème 2.10

Soit f une fonction continue sur un segment. Alors

En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 2.11 – de la bijection

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement monotone, et $J = f(I)$. Alors
, et

NOTA : On note qu'une certaine forme de réciproque à ce théorème est vraie : toute injection continue sur un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est monotone.

Corollaire 2.12

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I intervalle) une fonction strictement monotone. Soient $a, b \in I$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

2.3 Dérivation

Définition 2.13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement

admet une limite réelle quand $x \to a,\ x \neq a$.

Dans ce cas, cette limite s'appelle

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque point de I. On note alors $f' : a \mapsto f'(a)$, appelée *dérivée de f*.

On a alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.14 – de Rolle

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors

Théorème 2.15 – des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors

2.4 Développements limités

On rappelle la définition de la négligeabilité d'une fonction :

Définition 2.16

Soient f et g définie sur un intervalle I, et soit a au voisinage de I, g ne s'annulant pas au voisinage de a. On dit que f est *négligeable* devant g si

On note alors $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.

On peut alors utiliser le résultat suivant pour la continuité et la dérivabilité d'une fonction :

Proposition 2.17

Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. Alors

- f est continue en a si et seulement si

- f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

  Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

Pour les ordres supérieurs, seul l'implication directe est vraie, et on peut utiliser la formule de Taylor-Young :

Théorème 2.18 – Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par

$$f(x) =$$

Il faut alors connaître les développements limités usuels suivants :

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{1}{1+x} =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

$$e^x =$$

$$\ln(1-x) =$$

$$\sin(x) =$$

$$\cos(x) =$$

$$\arctan(x) =$$

On pourra utiliser des développements limités pour calculer des limites, ou pour étudier des fonctions au voisinage de l'infini, avec les définitions suivantes :

Définition 2.19

Soit f une fonction définie au voisinage de ∞, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- si $\lim_\infty f = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$
- si $\lim_\infty f = \pm\infty$, alors
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
    * si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$
    * si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$

2.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$, $x \to +\infty$

b) $\ln(\sin(x)) - \ln(x)$, $x \to 0^+$

c) $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \to +\infty$

d) $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$, $x \to +\infty$

Exercice 2

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
2. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$.
3. Soit $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1.$$
Déterminer a.

Exercice 3

Donner un équivalent de $e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}$ au voisinage de $x = 0$.

Donner un équivalent de $e^{2\cos(x)} - e^2$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice 4

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère
$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 des fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 5

Soit $h : \begin{array}{ccc} D_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \end{array}$

1. Déterminer D_h. Donner un D.L. à l'ordre 2 en 0 de h.
2. En déduire l'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_h$ en 0 et étudier la position relative de T_0 et $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0.

3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$h(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que h admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Préciser l'équation de Δ et la position relative de $\mathcal{C}_h$ et Δ au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0 puis au voisinage de $+\infty$

Exercice 6

Calculer

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x,$$

puis donner un équivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - \ell$$

quand $x \to \infty$.

Exercice 7

Calculer la limite quand $x \to \alpha$ de

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}.$$

Exercice 8

Donner un équivalent de $\frac{x\ln(1+\sqrt{x})}{e^x - 1}$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue, et qu'elle admet un unique point fixe c dans $[0,1]$.

2. Soit (c_n) définie par $c_0 \in [0,1]$ et $\forall n,\ c_{n+1} = f(c_n)$.

   a) Montrer que la suite est bien définie.

   b) Montrer que pour tout n
   $$|c_n - c| \leqslant k^n |c_0 - c|.$$

   c) En déduire la limite de (c_n).

   d) Écrire une fonction Python prenant en paramètre une telle fonction f, et donnant une valeur approchée de son point fixe.

Exercice 10 Fonction W de Lambert

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Donner le tableau de variations complet de f (variations, limites), puis tracer la courbe représentative de f (on fera apparaître la tangente à la courbe en 0).
2. Montrer que f induit une bijection h de $[-1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
3. Soit W la fonction réciproque de h. Montrer que W est dériable sur $]-e^{-1}, +\infty[$, et que pour tout $x \neq 0$,
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Exercice 11

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que f^{-1} admet un développement limité, qu'on déterminera.

Exercice 12

Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{array}$

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée sera encore notée h.
2. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Exprimer $h'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} h(x)$$
4. Montrer par récurrence que h est infiniment dérivable en 0 et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = 0$. Donner le $DL_n(0)$ de h. Qu'en déduisez-vous ?