2 Rappels d'analyse

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats d'analyse vus en première année.

2.1 Limites et continuité

Commençons par rappeler les différentes définitions de limite :

Définition 2.1

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et soient a au voisinage de X et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit alors que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a si

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$		Valeur de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$		
		$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Valeur de $a \in \overline{\mathbb{R}}$	$a \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) < M$
	$+\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) < M$
	$-\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) < M$

On rappelle alors que si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

En général, pour montrer l'existence d'une limite, on utilisera soit des limites usuelles, soit des opérations sur les limites usuelles, soit des théorèmes de plus haut niveau.

Proposition 2.2 – Limites usuelles

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a les limites suivantes :

- $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$
- $e^{\alpha x} x^{\beta} \xrightarrow[x \to -\infty]{}$
- $\dfrac{\ln(x)^{\alpha}}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$
- $\ln(x)^{\alpha} x^{\beta} \xrightarrow[x \to 0]{}$

On ajoutera à ces limites usuelles tous les équivalents de fonctions usuels, qu'on reverra dans la section Développements limités.

Enfin, pour prouver l'existence d'une limite, on peut utiliser les théorèmes suivants :

Théorème 2.3 – d'encadrement des limites, cas ∞

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors
  , et .
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors
  , et .

Théorème 2.4 – d'encadrement des limites, cas réel

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g, h définies au voisinage de a. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \to a} h(x) = \ell.$$

Alors si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors

Pour les fonctions monotones, l'existence de limites à gauche et à droite est automatique :

Théorème 2.5 – de la limite monotone

Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit $f \ :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :

-

-
-

Le cas des fonctions décroissantes est analogue.

2.2 Continuité d'une fonction réelle

Définition 2.6

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$. On dit que f est *continue en a* si f admet une limite en a (qui ne peut être que $f(a)$), *i.e.*

On dit qu'une fonction est *continue* sur un ensemble X si

On peut alors parfois étendre l'ensemble de définition d'une fonction par continuité :

Proposition-Définition 2.7

Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I privé d'un point. On dit que f est *prolongeable par continuité* en a si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

-
-

Dans ce cas, la fonction $\hat{f}$ vérifie nécessairement

Pour les fonctions continues, on peut alors utiliser les théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 2.8 – des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $k \in \mathbb{R}$. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \leqslant k$ et $f(b) \geqslant k$, alors

Corollaire 2.9 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors

Théorème 2.10

Soit f une fonction continue sur un segment. Alors

En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 2.11 – de la bijection

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement monotone, et $J = f(I)$. Alors , et

NOTA : On note qu'une certaine forme de réciproque à ce théorème est vraie : toute injection continue sur un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est monotone.

Corollaire 2.12

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I intervalle) une fonction strictement monotone. Soient $a, b \in I$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

2.3 Dérivation

Définition 2.13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement

admet une limite réelle quand $x \to a,\ x \neq a$.

Dans ce cas, cette limite s'appelle

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque point de I. On note alors $f' : a \mapsto f'(a)$, appelée *dérivée de f*.

On a alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.14 – de Rolle

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors

Théorème 2.15 – des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors

2.4 Développements limités

On rappelle la définition de la négligeabilité d'une fonction :

Définition 2.16

Soient f et g définie sur un intervalle I, et soit a au voisinage de I, g ne s'annulant pas au voisinage de a. On dit que f est *négligeable* devant g si

On note alors $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.

On peut alors utiliser le résultat suivant pour la continuité et la dérivabilité d'une fonction :

Proposition 2.17

Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. Alors

- f est continue en a si et seulement si

- f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

  Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

Pour les ordres supérieurs, seul l'implication directe est vraie, et on peut utiliser la formule de Taylor-Young :

Théorème 2.18 – Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par

$$f(x) =$$

Il faut alors connaître les développements limités usuels suivants :

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{1}{1+x} =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

$$e^x =$$

$$\ln(1-x) =$$

$$\sin(x) =$$

$$\cos(x) =$$

$$\arctan(x) =$$

On pourra utiliser des développements limités pour calculer des limites, ou pour étudier des fonctions au voisinage de l'infini, avec les définitions suivantes :

Définition 2.19

Soit f une fonction définie au voisinage de ∞, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- si $\lim_\infty f = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$
- si $\lim_\infty f = \pm\infty$, alors
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
    - si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$
    - si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$

2.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$, $x \to +\infty$

b) $\ln(\sin(x)) - \ln(x)$, $x \to 0^+$

c) $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \to +\infty$

d) $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$, $x \to +\infty$

Exercice 2

Donner un équivalent de $e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}$ au voisinage de $x = 0$.

Donner un équivalent de $e^{2\cos(x)} - e^2$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$f_a : \begin{array}{ccc}]-3,3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x^2 - ax + 1)\tan\left(\frac{\pi x}{6}\right) \end{array}.$$

1. Donner un équivalent de f_a en $x = 3$.
2. Étudier la prolongeabilité par continuité en $x = 3$.
3. Plus généralement, si $P \in \mathbb{R}[X]$, à quelle condition sur P la fonction $x \mapsto P(x)\tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en $x = 3$?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents.

Indication : On pourra commencer par montrer que 0 *a une infinité d'antécédents.*

Exercice 5

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. Calculer pour tout $k > 2$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

Exercice 6

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array}$.

1. Montrer que pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que
$$f^{(n)} = P_n \times f.$$
2. Calculer le degré de P_n.
3. Montrer que pour tout n, P_n admet exactement n racines réelles distinctes.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (E).$$

1. a) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
   Indication : on pourra déterminer a et b tels que $\frac{x^3}{1+x^2} = ax + \frac{bx}{1+x^2}$.
   b) Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $y(0) = 0$.
   Montrer à l'aide d'un développement limité que la fonction
   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
   est dérivable en 0.
   En déduire qu'il existe une unique solution y de (E) sur $\mathbb{R}$.
   c) Soit f la solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(1) = \frac{1}{2}$. Expliciter f.
2. On considère la méthode de résolution approchée de l'équation différentielle basée sur l'approximation
$$y'(x) = \frac{1}{h}(y(x+h) - y(x))$$
lorsque h est petit.
Montrer qu'alors à partir de la valeur $y(x)$ prise par une solution y à l'abscisse x, on obtient pour l'abscisse $x + h$ la valeur $y(x+h)$ donnée par
$$y(x+h) = y(x) + h\left(\frac{x}{1+x^2} + a\frac{y(x)}{x}\right)$$
où a est un réel à préciser.
3. Écrire une fonction Python qui renvoie les listes $X = [x_0, x_1, \ldots]$ d'abscisses sur l'intervalle $[1, 10]$ et $Y = [y_0, y_1, \ldots]$ des ordonnées correspondantes avec $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout i, $x_{i+1} = x_i + 0,1$ et $y_i = y(x_i)$.

4. Écrire une fonction Python renvoyant $f(x)$ pour x donné en paramètre.

5. Afficher à l'aide de Python une ligne brisée reliant les coordonnées des listes de la fonction de la question 3 et la courbe de la fonction f. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8

Calculer la limite quand $x \to \alpha$ de

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}.$$

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y, \ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue, et qu'elle admet un unique point fixe c dans $[0,1]$.

2. Soit (c_n) définie par $c_0 \in [0,1]$ et $\forall n, \ c_{n+1} = f(c_n)$.

   a) Montrer que la suite est bien définie.
   b) Montrer que pour tout n
   $$|c_n - c| \leqslant k^n |c_0 - c|.$$
   c) En déduire la limite de (c_n).
   d) Écrire une fonction Python prenant en paramètre une telle fonction f, et donnant une valeur approchée de son point fixe.

Exercice 10

Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$, $(g_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(h_n(x))_{n \geqslant 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^k\right), \quad g_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - x^{2k-1}\right) \quad \text{et} \quad h_n(x) = f_n(x) g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$, $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x)$ et $h(x) = f(x)g(x)$.

1. Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x), g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\frac{k}{100}$ avec $k \in \{0, \ldots, 80\}$ et $n = 100$. Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

3. a) Établir que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 1 + t \leqslant e^t.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x)$ existe et vérifie

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

b) Montrer que f est continue en 0.

4. a) Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

b) Montrer que pour tous $t \in [0, 1[$ et $x \in [0, 1[$, $1 - (1-x)^t \geqslant xt$.
(on pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.)

c) En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leqslant g(x) \leqslant \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right)$$

puis la continuité de g en 0.

5. a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$: $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$.
En déduire que $h(x^2) = h(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $h\left(x^{2^n}\right) = h(x)$.
Conclure alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $h(x) = 1$.

c) Ce dernier résultat confirme-t-il votre conjecture ?