2 Rappels d'analyse

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats d'analyse vus en première année.

2.1 Limites et continuité

Commençons par rappeler les différentes définitions de limite :

Définition 2.1

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et soient a au voisinage de X et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit alors que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a si

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$</td><td colspan="3">Valeur de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$</td></tr>
<tr><td>$\ell \in \mathbb{R}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Valeur de $a \in \overline{\mathbb{R}}$</td><td>$a \in \mathbb{R}$</td><td>$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$
$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$
$|f(x) - \ell| < \varepsilon$</td><td>$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,$
$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$
$f(x) > M$</td><td>$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,$
$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$
$f(x) < M$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x > N,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$</td><td>$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x > N,\ f(x) > M$</td><td>$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x > N,\ f(x) < M$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x < N,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$</td><td>$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x < N,\ f(x) > M$</td><td>$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$
$\forall x < N,\ f(x) < M$</td></tr>
</table>

On rappelle alors que si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

En général, pour montrer l'existence d'une limite, on utilisera soit des limites usuelles, soit des opérations sur les limites usuelles, soit des théorèmes de plus haut niveau.

Proposition 2.2 – Limites usuelles

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a les limites suivantes :

- $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
- $e^{\alpha x} x^\beta \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
- $\dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- $\ln(x)^\alpha x^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On ajoutera à ces limites usuelles tous les équivalents de fonctions usuels, qu'on reverra dans la section Développements limités.

Enfin, pour prouver l'existence d'une limite, on peut utiliser les théorèmes suivants :

Théorème 2.3 – de majoration ou minoration

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors g admet une limite en a, et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors f admet une limite en a, et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 2.4 – d'encadrement des limites

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g, h définies au voisinage de a. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a} h(x) = \ell.$$

Alors si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors g admet une limite en a, et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Pour les fonctions monotones, l'existence de limites à gauche et à droite est automatique :

Théorème 2.5 – de la limite monotone

Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit $f\ :\ ]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :

- Pour tout $a \in]\alpha, \beta[$, f admet une limite à gauche et une limite à droite en a, et

$$-\infty < f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+) < +\infty.$$

- f admet une limite à droite en α, qui est finie si f est minorée
- f admet une limite à gauche en β, qui est finie si f est majorée

Le cas des fonctions décroissantes est analogue.

2.2 Continuité d'une fonction réelle

Définition 2.6

Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$. On dit que f est *continue en a* si f admet une limite en a (qui ne peut être que $f(a)$), *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit qu'une fonction est *continue* sur un ensemble X si elle est continue en chacun des points de X.

On peut alors parfois étendre l'ensemble de définition d'une fonction par continuité :

Proposition-Définition 2.7

Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I privé d'un point. On dit que f est *prolongeable par continuité* en a si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

- il existe une fonction continue $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I \backslash \{a\},\ f(x) = \hat{f}(x)$.
- la fonction f admet une limite finie ℓ en a

Dans ce cas, la fonction $\hat{f}$ vérifie nécessairement $\hat{f}(a) = \ell$.

Pour les fonctions continues, on peut alors utiliser les théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 2.8 – des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $k \in \mathbb{R}$. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \leqslant k$ et $f(b) \geqslant k$, alors il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = k$.

Corollaire 2.9 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.10

Soit f une fonction continue sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 2.11 – de la bijection

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement monotone, et $J = f(I)$. Alors f est une bijection entre I et J, et f^{-1} est continue et a le même sens de variation que f.

NOTA : On note qu'une certaine forme de réciproque à ce théorème est vraie : toute injection continue sur un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est monotone.

Corollaire 2.12

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I intervalle) une fonction strictement monotone. Soient $a, b \in I$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

2.3 Dérivation

Définition 2.13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite réelle quand $x \to a,\ x \neq a$.

Dans ce cas, cette limite s'appelle *nombre dérivé de f au point a*, et se note $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque point de I. On note alors $f' : a \mapsto f'(a)$, appelée *dérivée de f*.

On a alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.14 – de Rolle

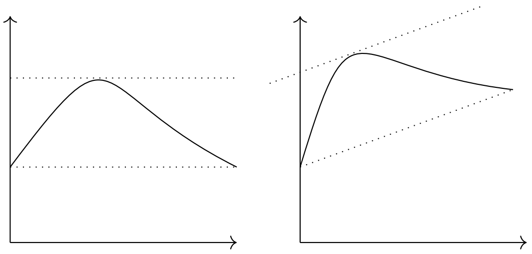
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 2.15 – des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



2.4 Développements limités

On rappelle la définition de la négligeabilité d'une fonction :

Définition 2.16

Soient f et g définie sur un intervalle I, et soit a au voisinage de I, g ne s'annulant pas au voisinage de a. On dit que f est *négligeable* devant g si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note alors $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

On peut alors utiliser le résultat suivant pour la continuité et la dérivabilité d'une fonction :

Proposition 2.17

Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. Alors

- f est continue en a si et seulement si

$$f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(1).$$

- f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x - a).$$

Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

Pour les ordres supérieurs, seul l'implication directe est vraie, et on peut utiliser la formule de Taylor-Young :

Théorème 2.18 – Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

Il faut alors connaître les développements limités usuels suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

On pourra utiliser des développements limités pour calculer des limites, ou pour étudier des fonctions au voisinage de l'infini, avec les définitions suivantes :

Définition 2.19

Soit f une fonction définie au voisinage de ∞, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- si $\lim_\infty f = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$

- si $\lim_{\infty} f = \pm\infty$, alors
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
  - si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
    * si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$
    * si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$

2.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$, $x \to +\infty$

b) $\ln(\sin(x)) - \ln(x)$, $x \to 0^+$

c) $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \to +\infty$

d) $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$, $x \to +\infty$

Réponse de l'exercice

a) 1

b) 0

c) 1

d) 0

Exercice 2

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
2. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$.
3. Soit $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1.$$
Déterminer a.

Réponse de l'exercice

1. On a pour tout $x > 0$ $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, et donc par encadrement des limites, on a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.
2. Par la question précédente, on a donc $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$.
3. Par la question précédente, on a $\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor \sim na^2$.
On a donc
$$a\frac{\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor}{na^2} - \frac{\lfloor na \rfloor}{na} \to a - 1.$$
Or on a aussi
$$a\frac{\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor}{na^2} - \frac{\lfloor na \rfloor}{na} \to \frac{1}{a}.$$
Par unicité de la limite, on a donc $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Exercice 3

Donner un équivalent de $e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}$ au voisinage de $x = 0$.

Donner un équivalent de $e^{2\cos(x)} - e^2$ au voisinage de $x = 0$.

Réponse de l'exercice

On factorise :

$$e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} \left(e^{\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{\cos(x)}} - 1 \right) \sim \frac{x^3}{2}.$$

On a

$$e^{2\cos(x)} - e^2 = e^2(e^{2(\cos(x)-1)} - 1) \sim 2e^2(\cos(x) - 1) \sim -(ex)^2.$$

Exercice 4

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 des fonctions f_λ sont parallèles.

2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Réponse de l'exercice

La fonction f_λ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a alors pour tout x

$$f'_\lambda(x) = \frac{-x^2 - 2\lambda x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

1. En 0, on a donc $f'_\lambda(0) = 1$, et donc toutes les tangentes ont le même coefficient directeur : elles sont parallèles.
2. En 1, on a donc $f'_\lambda(1) = -\frac{\lambda}{2}$. Les tangentes ont donc pour équation

$$(T_\lambda) \quad y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(1+\lambda) = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}.$$

   On note alors que les tangentes (T_0) et (T_2) se coupent au point $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Montrons que les autres passent aussi par ce point :

$$-\frac{\lambda}{2} \times 2 + \lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   Toutes les tangentes passent donc par ce point, et sont donc concourantes.

Exercice 5

Soit $h : \begin{array}{ccc} D_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \end{array}$

1. Déterminer D_h. Donner un D.L. à l'ordre 2 en 0 de h.

2. En déduire l'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_h$ en 0 et étudier la position relative de T_0 et $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0.

3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$h(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} \underset{x\to\infty}{+\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que h admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Préciser l'équation de Δ et la position relative de $\mathcal{C}_h$ et Δ au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_h$ au voisinage de 0 puis au voisinage de $+\infty$

Réponse de l'exercice

1. On a $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \\ &= -x\sqrt{1+x^2}\frac{1}{1-x} \\ &= -x\left(1+\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{+\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)\left(1+x+x^2 \underset{x\to 0}{+\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right) \\ &= -x - x^2 - \frac{3}{2}x^3 \underset{x\to 0}{+\mathrm{o}}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2. La tangente T_0 à $\mathcal{C}_h$ en 0 est donc la droite d'équation $y = -x$. Comme $-x^2$ est négatif au voisinage de 0 alors $\mathcal{C}_h$se trouve en dessous de sa tangente en 0.

3. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} \\ &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= x\left(1+\frac{1}{2x^2} \underset{x\to\infty}{+\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{+\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x+1+\frac{3}{2x} \underset{x\to\infty}{+\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

4. On en déduit que h admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ d'équation $y = x+1$ et que $\mathcal{C}_h$ se trouve au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

5. TODO

Exercice 6

Calculer

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x,$$

puis donner un équivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - \ell$$

quand $x \to \infty$.

Réponse de l'exercice

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} &= \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \\ &= 1+\frac{1}{x\ln(x)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right) \\ &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln(x)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\right) \\ &= 1+\frac{1}{\ln(x)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\end{aligned}$$

Finalement, la limite cherchée vaut 1 et l'équivalent $\frac{1}{\ln(x)}$.

Exercice 7

Calculer la limite quand $x \to \alpha$ de

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}.$$

Réponse de l'exercice

Si $\alpha = 0$, on a clairement $\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = x \to 0$.

Sinon, on factorise :

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} &= \frac{(x-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\alpha^{n-k}}{(x-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k\alpha^{n-k-1}} \\ &\sim \frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} \\ &\sim \frac{n+1}{n}\alpha\end{aligned}$$

Exercice 8

Donner un équivalent de $\frac{x\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1}$ au voisinage de $x=0$.

Réponse de l'exercice

On a

$$\frac{x\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} \sim \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}.$$

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue, et qu'elle admet un unique point fixe c dans $[0,1]$.
2. Soit (c_n) définie par $c_0 \in [0,1]$ et $\forall n,\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   a) Montrer que la suite est bien définie.
   b) Montrer que pour tout n
   $$|c_n - c| \leqslant k^n |c_0 - c|.$$
   c) En déduire la limite de (c_n).
   d) Écrire une fonction Python prenant en paramètre une telle fonction f, et donnant une valeur approchée de son point fixe.

Réponse de l'exercice

1. Soit $a \in [0,1]$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$
   $$|f(a) - f(x)| \leqslant k|x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0,$$
   et la fonction est bien continue en a.
   Ensuite, f est continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, donc admet au moins un point fixe (en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f - \mathrm{id}$). Supposons qu'elle en admette deux, x et y.
   Alors
   $$|f(x) - f(y)| = |x - y| \leqslant k|x - y|,$$
   et donc $k \geqslant 1$ ou $|x - y| = 0$. Le premier cas étant exclu, on a donc $x = y$, et donc l'unicité du point fixe.
2. a) La fonctione est à valeurs dans $[0,1]$, qui est donc un intervalle stable par f. La suite est donc bien définie.
   b) Montrons-le par récurrence sur n :
      - on a bien $|c_0 - c| \leqslant |c_0 - c|$
      - soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose $|c_n - c| \leqslant k^n |c_0 - c|$. Alors
      $$\begin{aligned} |c_{n+1} - c| &= |f(c_n) - f(c)| \\ &\leqslant k|c_n - c| \\ &\leqslant k^{n+1}|c_0 - c| \end{aligned}$$
   c) Comme $k \in]0,1[$, on a $k^n(c_0 - c) \to 0$, et la suite (c_n) converge donc vers c.
   d) On propose le code suivant :

```python
import random as rd

def pointfixe(f,N):
    c = rd.random()
    for i in range(N):
        c = f(c)
    return c
```

Exercice 10 Fonction W de Lambert

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

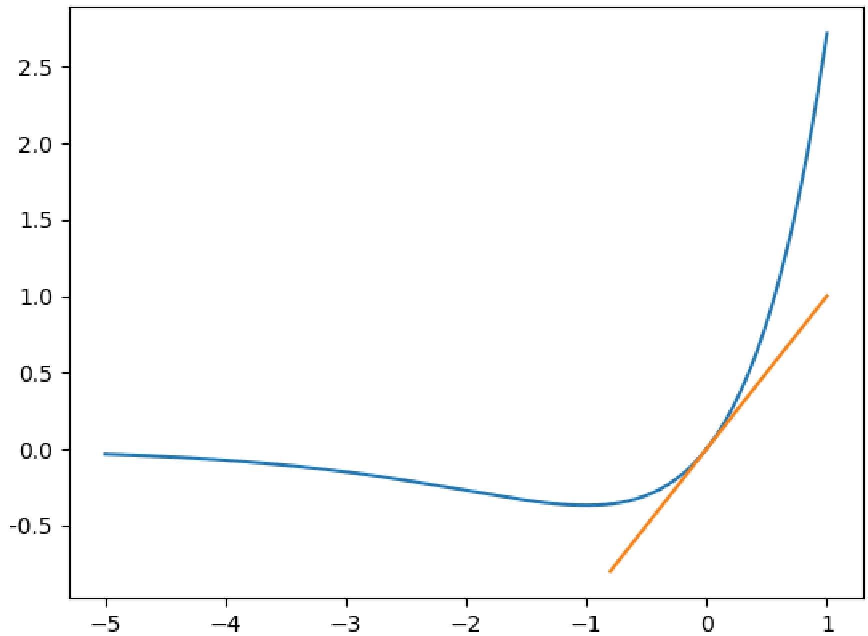
1. Donner le tableau de variations complet de f (variations, limites), puis tracer la courbe représentative de f (on fera apparaître la tangente à la courbe en 0).
2. Montrer que f induit une bijection h de $[-1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
3. Soit W la fonction réciproque de h. Montrer que W est dériable sur $]-e^{-1}, +\infty[$, et que pour tout $x \neq 0$,
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

Réponse de l'exercice

1. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

La tangente en 0 a pour équation $y = x$.



2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Par le théorème de la bijection, elle induit donc une bijection sur l'image de cet intervalle, $[-e^{-1}, +\infty[$.

3. On note que f est dérivable sur $[-1, \infty[$, de dérivée $x \mapsto (x+1)e^x$.
   Cette dérivée ne s'annule pas sur $]-1, \infty[$, et par dérivation de fonction réciproque, la fonction W est dérivable sur ce dernier intervalle, de dérivée
   $$\forall x > -1,\ W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(W(x)+1)}.$$
   Mais on a $W(x)e^{W(x)} = x$, donc $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, et on retrouve le résultat demandé.

Exercice 11

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que f^{-1} admet un développement limité, qu'on déterminera.

Réponse de l'exercice

1. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont de clase $\mathcal{C}^\infty$, et donc la fonction f aussi.
2. On a au voisinage de 0
   $$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right),$$
   et donc
   $$f(x) = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x
   $$f'(x) = \left(1 + 2x^2\right)e^{x^2}.$$
   f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc induit une bijection dans son image. Comme f tend vers ∞ (resp. $-\infty$) en ∞ (resp. $-\infty$), son image est donc $\mathbb{R}$.
4. On écrit alors
   $$f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$
   On sait que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, et donc
   $$x = a + bf(x) + cf(x)^2 + df(x)^3 + ef(x)^4 + gf(x)^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$
   En réinjectant le développement de f, on obtient donc
   $$x = a + bx + cx^2 + (b+d)x^3 + (2c+e)x^4 + (\frac{1}{2}b + 3d + g)x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$
   En identifiant les coefficients, on a enfin
   $$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

Exercice 12

Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{array}$

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée sera encore notée h.
2. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Exprimer $h'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} h(x)$$
4. Montrer par récurrence que h est infiniment dérivable en 0 et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = 0$. Donner le $DL_n(0)$ de h. Qu'en déduisez-vous ?

Réponse de l'exercice

1. On a $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Ainsi on peut prolonger la fonction h par continuité en 0 par
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$
2. Sur $\mathbb{R}^*$, h est une composée de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, ainsi h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $x \neq 0$ on a
$$h'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3} h(x)$$
3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(n)}(x) \frac{P_n(x)}{x^{3n}} h(x)$$
<u>Initialisation :</u>
On sait déjà que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(0)}(x) = h(x) = \frac{1}{x^{3\times 0}} h(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(1)}(x) = h'(x) = \frac{2}{x^{3\times 1}} h(x)$$
<u>Hérédité :</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(n)}(x) \frac{P_n(x)}{x^{3n}} h(x)$$
Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \left(h^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nP_n(x)x^{3n-1}}{x^{6n}} h(x) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} h(x) \\ &= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)}{x^{3n+3}} h(x) + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} h(x) \\ &= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}} h(x) \end{aligned}$$

Posons alors $P_{n+1} = X^3 P_n' + (2 - 3nX^2)P_n$, on a alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h^{(n+1)}(x)\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}h(x)$$

Ce qui montre la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

4. Montrons par récurrence que h est n fois dérivable en 0 pour tout entier n et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = 0$.

<u>Initialisation :</u>

Soit $x \neq 0$, on a alors

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

On sait par croissance comparée que $\lim\limits_{u \to +\infty} u\exp(-u^2) = 0$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u\exp(-u^2) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$. La fonction h est donc dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que h est n fois dérivable en 0 et que $h^{(n)}(0) = 0$.

Soit $x \neq 0$, on a alors

$$\frac{h^{(n)}(x) - h^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}h(x)$$

On sait par croissance comparée que $\lim\limits_{u \to +\infty} u^{3n+1}\exp(-u^2) = 0$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u^{3n+1}\exp(-u^2) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{3n+1}}h(x) = 0$ et, comme, P_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}h(x) = 0$. $h^{(n)}$ est donc dérivable en 0 et $\left(h^{(n)}\right)'(0) = 0$. C'est-à-dire h est $n+1$ fois dérivable en 0 et $h^{(n+1)}(0) = 0$, ce qui achève la récurrence.

Comme h est infiniment dérivable en 0 alors, d'après la formule de Taylor-Young, h admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Comme $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a donc

$$h(x) = 0 + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

h admet donc un développement limité à tout ordre en 0 dont la partie régulière est nulle.