3 Suites et séries numériques

3.1 Rappels sur les suites numériques

On rappelle dans cette section quelques propriétés générales des suites numériques.

Définition 3.1

Soit (u_n) une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

ℓ s'appelle alors *limite de la suite* (u_n) ; on note

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ ou } \ell = \lim u \text{ ou } u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n > M.$$

On dit que (u_n) diverge vers $-\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n < M.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$.

On note que d'après la définition, toute suite convergente est bornée ; la réciproque est fausse.

Pour montrer la convergence de certaines suites, on peut soit utiliser des résultats sur les suites usuelles, soit utiliser un des théorèmes suivants

Théorème 3.2 – de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. Alors

- si (u_n) est majorée, alors elle converge
- si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$

Soit (u_n) une suite décroissante. Alors

- si (u_n) est minorée, alors elle converge
- si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Théorème 3.3 – d'encadrement des limites

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors (v_n) converge, vers le réel ℓ.

Théorème 3.4 – d'encadrement des limites, cas infini

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

Si (u_n) diverge vers $+\infty$, (v_n) diverge vers $+\infty$.

Si (v_n) diverge vers $-\infty$, (u_n) diverge vers $-\infty$.

Dans le cas de l'étude de deux suites, on peut aussi prouver qu'elles sont *adjacentes*.

Définition 3.5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et que leur différence tend vers 0.

Proposition 3.6

Deux suites adjacentes convergent, vers la même limite.

Dans ce cas, la limite ℓ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

3.2 Séries numériques

3.2.1 Généralités

On va dans cette section étudier la notion de *série*.

Définition 3.7

Soit (u_n) une suite numérique. On appelle *série de terme général* u_n la suite, notée $\sum u_n$ (ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ s'il y a une confusion possible), dont le n-ième terme est défini par $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

NOTA : On adaptera facilement la définition au cas où le terme général n'est pas défini sur $\mathbb{N}$.

Définition 3.8

Soit $\sum u_n$ une série numérique. La suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelé *suite des sommes partielles associée à* $\sum u_n$.

On se rappellera en particulier qu'une série n'est qu'un type particulier de suite ; on pourra donc toujours utiliser les théorèmes généraux sur les suites à la suite des sommes partielles.

EXEMPLE : Certaines séries ont des noms, qu'il faut connaître :

- on appelle *série harmonique* la série de terme général $\frac{1}{n}$. Elle est donc définie par la suite des sommes partielles

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ \ldots,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

- on appelle *série géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$ la série de terme général q^n. Elle est donc définie par la suite des sommes partielles

$$S_0 = 1,\ S_1 = 1 + q,\ S_2 = 1 + q + q^2,\ \ldots,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

  On peut alors calculer explicitement les termes de cette série

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- on appelle *série exponentielle* de $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$. Elle est donc définie par la suite des sommes partielles

$$S_0 = 1,\ S_1 = 1 + x,\ S_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,\ \dots,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Définition 3.9

Soit $\sum u_n$ une série. On dit que cette série converge si la suite des sommes partielles associée converge. On note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de cette suite.

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Déterminer si une série converge ou non s'appelle étudier la *nature de la série*.

NOTA : Attention ! La notation $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ n'a de sens que si la série est convergente. On devra donc toujours s'assurer que la série converge avant de l'utiliser.

Proposition 3.10

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Notons (S_n) la suite des sommes partielles associée à notre série.

On a déjà vu que si $q = 1$, alors pour tout n, $S_n = n + 1$, et la série diverge donc.

On suppose donc maintenant que $q \neq 1$. On a alors pour tout n

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Supposons $|q| < 1$. La suite géométrique $\left(q^{n+1}\right)$ converge alors vers 0. Par opération sur les limites, la série converge donc, vers $\frac{1}{1-q}$.

Supposons maintenant que la série converge, *i.e.* que la suite (S_n) converge. Alors, par opération sur les limites, la suite $(1 - (1-q)S_n) = \left(q^{n+1}\right)$ converge, et donc $|q| < 1$. $\square$

Proposition 3.11

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Notons (S_n) la suite des sommes partielles.

Par décroissance de la fonction inverse, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [k, k+1]$

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k},$$

et donc en sommant ces égalités pour k allant de 1 à n, par la relation de Chasles

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant S_n.$$

On a donc finalement

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n.$$

Par comparaison de suites, la suite (S_n) diverge donc vers $+\infty$. □

Cette dernière série servira souvent de contre-exemple. Par exemple, on a la proposition suivante, dont la réciproque est fausse.

Proposition 3.12

Soit $\sum u_n$ une série. Alors si $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration. Notons (S_n) la suite des sommes partielles associée. On a alors pour tout $n \geqslant 1$

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si la série converge, alors les suites (S_n) et donc (S_{n-1}) convergent, vers la même limite. Par opération sur les limites, la suite (u_n) converge donc vers 0. □

NOTA : On se servira plus souvent de la contraposée : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge (on parle alors de *divergence grossière*).

Comme le montre la série harmonique, la réciproque est fausse : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0, mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

EXEMPLE : On retrouve la divergence des séries géométriques de raison $|q| > 1$; la suite (q^n) ne converge alors pas vers 0, et donc la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

On pourra parfois se servir du résultat suivant, affirmant que la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes.

Proposition 3.13

Soit $\sum u_n$ une série numérique, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geqslant N} u_n$ converge.

EXEMPLE : Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3,\ u_n = \frac{1}{2^n}.$$

Alors cette série converge.

Enfin, comme pour les suites, les combinaisons linéaires de séries convergentes sont convergentes.

Proposition 3.14

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum(\lambda u_n)$ converge. Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

NOTA : Attention au premier point de cette proposition, dont la réciproque est fausse. Par exemple, la série $\sum(1-1)$ converge, mais ni $\sum 1$ ni $\sum(-1)$ ne convergent.

3.2.2 Convergence absolue et séries à termes positifs

Très souvent, on étudiera les séries donc les termes sont tous positifs.

Définition 3.15

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *à termes positifs* si pour tout n, $u_n \geqslant 0$.

On a alors

Proposition 3.16

Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs, et soit (S_n) la suite des sommes partielles associée. Alors

- la suite (S_n) est croissante
- la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Démonstration. Montrons le premier point. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La suite est donc bien croissante.

Le second point se déduit du théorème de comportement des suites monotones. □

On peut alors énoncer le théorème suivant, pour montrer que des séries convergent en se ramenant à des résultats connus.

Théorème 3.17

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$
- la série $\sum v_n$ converge.

Alors la série $\sum u_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Démonstration. Notons respectivement (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles associées à $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Supposons que les hypothèses sont vérifiées. On a alors pour tout n

$$u_n \leqslant v_n, \text{ puis } S_n \leqslant T_n.$$

D'après la proposition précédente, comme $\sum v_n$ converge, on a pour tout n $T_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k$, et la suite (S_n) est donc majorée par cette limite.

Donc la série $\sum u_n$ converge, et on a bien l'égalité demandée. □

NOTA : Attention, ce résultat peut devenir faux si les séries ne sont pas à terme positif. Par exemple, la série $\sum \frac{-1}{n}$ diverge, alors que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

On se servira aussi de la contraposée de ce résultat : si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Théorème 3.18

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que les suites (u_n) et (v_n) soient équivalentes. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (*i.e.* convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux vers $+\infty$).

Démonstration. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1, et donc à partir d'un certain rang, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$.

On a alors $v_n \leqslant 2u_n$ et $u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$. Il suffit alors d'utiliser le résultat précédent. □

NOTA : On peut utiliser le même type de preuve si $u_n = o(v_n)$ et que la série $\sum v_n$ converge.

Pour pouvoir simplement utiliser ce critère, on parlera généralement de convergence *absolue*.

Définition 3.19

On dit qu'une série $\sum u_n$ converge *absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 3.20

Une série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit donc (u_n) une suite telle que $\sum |u_n|$ converge. On notera pour tout n

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les suites (u_n^+) et (u_n^-) sont alors à termes positifs, et on a directement pour tout n

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Mais on a pour tout n

$$u_n^+ \leqslant u_n^+ + u_n^- = |u_n|,$$

et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n^+$ converge. De même, la série $\sum u_n^-$ converge.

Par combinaison linéaire, la série $\sum (u_n^+ - u_n^-) = \sum u_n$ converge. □

On n'utilisera maintenant que des séries absolument convergentes.

NOTA : Dans le cas de séries absolument convergentes, l'ordre des termes dans lequel on somme ne change pas le résultat final.

On peut montrer que dans le cas de séries convergentes mais pas absolument convergentes*, l'ordre dans lequel on somme les termes de la suite peut modifier le résultat final (théorème de Weirstrass).

3.2.3 Séries usuelles

On utilisera les séries suivantes comme briques de base pour montrer que des séries convergent ou divergent, en utilisant le théorème de comparaison.

Proposition 3.21 – Séries géométriques et géométriques dérivées

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$.

On a dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration. On a déjà vu le résultat pour la première série. Le cas $q = 1$ étant trivial, on l'exclut de la preuve.

Pour les deux autres, soient pour tout n les fonctions définies sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Les fonctions f_n sont alors dérivables, et pour tout $x \neq 1$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-q^{n+1}-(n+1)q^n(1-q)}{(1-q)^2}.$$

Ainsi, la deuxième série converge si et seulement si $|q| < 1$.

On dérive une deuxième fois les fonctions f_n pour le dernier résultat. □

Proposition 3.22 – Série harmonique, série de l'inverse des carrés

La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

*. on parle alors de série *semi-convergente*

Démonstration. On a déjà vu la divergence de la série harmonique.

Soit alors $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)},$$

et donc en sommant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

La suite des sommes partielles est donc majorée, et la série est à termes positifs ; elle converge donc. □

NOTA : On pourra se rappeler que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Proposition 3.23 – Série exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

3.3 Exercices

Exercice 1

Étudier la nature des séries de termes généraux donnés, et calculer la somme si la série converge :

1. $\sum \frac{1}{2n}$
2. $\sum \frac{1}{2n+1}$
3. $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
4. $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
6. $\sum 1$
7. $\sum \frac{4^n-3^n}{5^n}$
8. $\sum nq^n,\, q \in \mathbb{R}$
9. $\sum n^2 q^n,\, q \in \mathbb{R}$

Réponse de l'exercice

1. Diverge.
2. Diverge.
3. Diverge.
4. Converge vers $-\ln(2)$
5. Diverge.
6. Diverge
7. Converge vers $\frac{5}{2}$.
8. Converge vers $\frac{q}{(1-q)^2}$ si $|q|<1$
9. Converge vers $\frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$ si $|q|<1$

Exercice 2 Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs, qui converge vers 0. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

1. Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Montrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
3. En déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Réponse de l'exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} A_{2n+2} - A_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= u_{2n+2} - u_{2n} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

La suite (A_{2n}) est donc décroissante.

$$\begin{aligned} A_{2n+3} - A_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= u_{2n+1} - u_{2n+3} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La suite (A_{2n+1}) est donc croissante.
De plus,

$$\begin{aligned} A_{2n+1} - A_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= u_{2n+1} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Les suites sont donc adjacentes.

2. Ainsi, les suites (A_{2n}) et (A_{2n+2}) convergent vers la même limite, et donc (A_n) converge : la série converge.

3. Posons $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (u_n) est alors décroissante, positive et de limite nulle. En appliquant le résultat démontré, la série proposée converge.

Exercice 3 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On étudie dans cet exercice la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On notera alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Si $\alpha \leqslant 0$, montrer que la série diverge.

2. On suppose alors $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

   Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right) \leqslant S_n.$$

4. En déduire que la série converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha < 1$.

Réponse de l'exercice

1. Il suffit d'utiliser la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et la croissance de l'intégrale.
2. En sommant les inégalités précédentes et en calculant l'intégrale.
3. Supposons $\alpha > 1$. On a alors pour tout n
$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$
La suite des sommes partielles est donc majorée, et donc la série converge.
Supposons maintenant que $\alpha < 1$. On a alors
$$S_n \geqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$
La suite des sommes partielles diverge vers ∞, et la série diverge donc.

Exercice 4

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

1. Montrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est positive pour $n \geqslant 2$.
2. En étudiant la fonction $f\colon x \mapsto x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2$, donner une majoration $v_{n+1} - v_n$.
3. Montrer que la série $\sum v_{n+1} - v_n$ converge, puis que (v_n) converge.
4. En déduire un équivalent de la série harmonique.

Réponse de l'exercice

1. On a directement
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \geqslant 0.$$
2. On montre facilement par étude de fonction que $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2$, et donc la fonction f est négative. On a donc pour tout n
$$v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$
3. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeant, la série $\sum v_{n+1} - v_n$ aussi. La suite (v_n) converge donc.
4. Notons γ la limite de (v_n). On a alors $\frac{v_n}{\ln(n)} \to 0$, et donc $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n+1)} \to 1$.
On a donc $H_n \sim \ln(n+1) \sim \ln(n)$.

Exercice 5

1. Pour tout n, calculer $\arctan(n^2+n+1) - \arctan(n^2-n+1)$.

2. En déduire que la série $\sum \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ converge, et calculer sa somme.

Réponse de l'exercice

On a la formule $\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. Donc

$$\arctan(n^2+n+1)-\arctan(n^2-n+1)=\arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right).$$

On a donc, pour $N\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)&=\sum_{n=0}^{N}\arctan(n^2+n+1)-\arctan(n^2-n+1)\\&=\sum_{n=0}^{N}\arctan(n^2+n+1)-\arctan((n-1)^2+(n-1)+1)\\&=\arctan(N^2+N+1)-\arctan(1)\\&\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Exercice 6 Critère d'Abel

Soient (a_n), (b_n) deux suites numériques. On pose $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$. On pose aussi $c_n=A_nb_n$ et $C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$.

1. Montrer que $C_n=A_nB_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}B_k$
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose
   - la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}v_k\right)_n$ est bornée
   - $u_n\to 0$
   - la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est absolument convergente.

   Montrer que la série $\sum u_nv_n$ converge.

Réponse de l'exercice

1. On a donc

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k \\ &= A_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum +_{k=0}^{n-1} A_{k+1} B_k \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) B_k \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

2. On pose pour tout n : $a_0 = u_0$, $a_n = u_n - u_{n-1}$ $b_n = v_n$, de sorte que pour tout n, $A_n = u_n$.
   La suite (B_n) est donc bornée : soit M un majorant. La suite (A_n) tend vers 0, donc est bornée en valeur absolue : soit N un majorant.
   On a donc pour tout n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= \sum_{k=0}^{n} A_n b_n \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

   Or pour tout k, $|a_{k+1} B_k| \leqslant M a_{k+1}$, terme général d'une série convergente, et donc $\sum a_{k+1} B_k$ converge absolument.
   On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} B_k.$$

Exercice 7

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum u_n$
   - converge si $\ell < 1$
   - diverge si $\ell > 1$
2. On suppose que (u_n) ne s'annule pas. On suppose $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum u_n$
   - converge si $\ell < 1$
   - diverge si $\ell > 1$
3. Montrer que dans les règles précédentes, on ne peut pas conclure si $\ell = 1$.

Réponse de l'exercice

1. • Supposons $\ell < 1$. Soit alors q tel que $\ell < q < 1$. On a alors, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, et donc $u_n \leqslant q^n$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
   • Supposons $\ell > 1$. Soit alors q tel que $1 < q < \ell$. Alrs à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant q^n$, et donc la série diverge grossièrement.
2. • Supposons $\ell < 1$. Soit alors q tel que $\ell < q < 1$. À partir d'un certain rang N, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, et donc la suite (u_n) est majorée par $(u_N q^{n-N})$, qui est le terme général d'une série convergente.
   • Supposons $\ell > 1$. Alors à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. En particulier, elle ne tend pas vers 0.
3. Considérons les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a alors :
   • $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$, et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série $\sum u_n$ diverge.
   • $\lim \sqrt[n]{v_n} = 1$, et $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, et la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 8

On pose pour tout n $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. a) Soient $\alpha > 1$ et $k \geqslant 2$. Montrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
   b) En déduire que quand $n \to \infty$,
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que quand $n \to \infty$
$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t \to 0.$$
3. On pose pour tout $t \in]0, \pi]$
$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$
   Vérifier que pour tout $t \in]0, \pi]$,
$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$
   On pourra utiliser la formule $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$
5. Montrer qu'alors
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)\,\mathrm{d}t = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

6. En déduire que (S_n) converge, et donner sa limite.

7. En déduire le développement
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Réponse de l'exercice

1. a) Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, on a donc pour tout $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$, et on trouve l'inégalité de gauche par croissance de l'intégrale.
L'autre inégalité est similaire.

   b) On somme les inégalités précédentes pour k entre n et N :
$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$
puis en calculant les intégrales :
$$\frac{1}{\alpha-1}\left(-\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(-\frac{1}{N^{\alpha-1}} + \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$
La suite $\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}\right)_N$ est donc croissante et majorée, donc converge, et en passant à la limite dans l'inégalité précédente :
$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}},$$
et on en déduit facilement que
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. On fait une intégration par parties avec les fonctions $u\colon t \mapsto f(t)$ et $v\colon t \mapsto \frac{-2}{n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$. Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, et donc
$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{2n+1}\left(f(0) - f(\pi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$
Le premier terme tend vers 0, et pour le second, on note que par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale
$$\left|\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi, le second terme tend aussi vers 0, et donc on retrouve la limite demandée.

3. On a

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= \Re\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

4. Avec deux intégrations par parties, on trouve facilement

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt) A_n(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\left((2a\pi + b)(-1)^n - b\right).$$

On peut donc prendre $a = \frac{1}{2\pi}$ et $b = -1$.

5. On a alors, par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (at^2 + bt) A_n(t)\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos(kt)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} + S_n \\
&= -\frac{\pi^2}{6} + S_n
\end{aligned}$$

6. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall t \in [0, \pi],\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{at^2 + bt}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Étudions la dérivée en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} &= \frac{\frac{at^2+bt}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + 1}{t} \\
&= \frac{at + b}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{at}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim a$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{b}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{t} &= \frac{2\sin(\frac{t}{2}) - t}{2t\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{t^3}{4} + \mathrm{o}\left(t^3\right)}{2t\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&\sim \frac{t}{4} \\
&\to 0
\end{aligned}$$