4 Introduction aux probabilités

4.1 Rappels de dénombrement

On rappelle dans cette partie quelques définitions et propriétés combinatoires.

Définition 4.1

On dit que deux ensembles E et F ont le même *cardinal* s

On dit alors qu'un ensemble est *fini* s'il existe un entier n tel que E ait le même cardinal que $[\![1, n]\!]$; on appelle alors ce n le cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$.

On peut alors calculer les cardinaux de certains ensembles utilisant les opérations usuelles :

Proposition 4.2

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

- $\mathrm{Card}(E \cup F) =$
- $\mathrm{Card}(E \times F) =$
- $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) =$

Regardons maintenant quelques objets combinatoires usuels. On se fixe un ensemble fini E de cardinal n.

Proposition-Définition 4.3

On appelle p-liste de E tout élément de E^p.

Il y a p-listes de E.

On peut voir les p-listes comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, avec remise.

Proposition-Définition 4.4

On appelle p-arrangement de E toute p-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.

Il y a p-arrangements de E.

On peut voir les p-arrangements comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, sans remise.

Proposition-Définition 4.5

On appelle *permutation de* E tout n-arrangement de E sans répétition.

Il y a permutations de E.

On peut voir les permutations comme le nombre de façons d'ordonner n objets.

Proposition-Définition 4.6

On appelle p-combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Il y a p-combinaisons de E.

On peut voir les p-combinaisons comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, simultanément.

Pour résumer, on peut dresser le tableau suivant, qui compte le nombre de façons de choisir p éléments parmi n :

	Avec répétition	Sans répétition
Avec Ordre		
Sans Ordre		

4.2 Espaces probabilisés, Tribus

4.2.1 Définition d'espace probabilisé

On va dans cette section étendre le concept d'espace probabilisé à des univers qui ne sont pas nécessairement finis.

Seules certaines parties de l'univers pourront alors avoir une probabilité : celles appartenant à une *tribu* :

Définition 4.7

Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *tribu* (ou une *σ-algèbre*) si :

-
- $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire, *i.e.*
- $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, *i.e.*

Les parties de $\mathcal{T}$ sont alors appelées *événements*.

EXEMPLE : Pour un univers Ω, la *tribu grossière* $\mathcal{T}_g =$ est une tribu.

La tribu discrète $\mathcal{T} =$ est une tribu.

NOTA : Dans le cas d'univers finis ou dénombrables, on utilise très souvent la tribu discrète.

Proposition 4.8

Soient Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Alors

-
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, *i.e.*

Fixons un peu de vocabulaire :

Définition 4.9

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$.

- Ω s'appelle
- $\varnothing$ s'appelle
- Deux événements E et F sont *incompatibles* si

On peut alors, comme dans le cas d'un univers fini, parler de système complet d'événements.

Définition 4.10

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'événements, avec I au plus dénombrable. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* si

- Les événements E_i sont incompatibles deux à deux, *i.e.*
- Les événements E_i recouvrent l'univers, *i.e.*

Il suffit maintenant de munir notre univers d'une notion de *mesure* pour pouvoir calculer des probabilités.

Définition 4.11

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

-
-
- $\mathbb{P}$ est *σ-additive*, *i.e.*

Un *espace probabilisé* est alors la donnée d'un univers Ω, d'une tribu $\mathcal{T}$ sur cet univers et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Nota : On note en particulier que la σ-additivité est vraie pour toute famille finie d'événements, et en particulier pour deux événements incompatibles :

$$\forall E, F \in \mathcal{T},$$

Dans le cas d'une famille infinie dénombrable, on note que la série converge toujours : elle est à termes positifs, et est majorée par 1.

Proposition 4.12

Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{T})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{T}$. Alors

-
-
-
-
-
-

Démonstration. Les preuves sont les mêmes que dans le cadre d'un univers fini. □

Définition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $E \in \mathcal{T}$.

- On dit que E est un événement presque sûr (ou presque certain) si
- On dit que E est un événement négligeable si

Nota : Attention à ne pas confondre l'événement certain avec les événements presque sûrs.

Exemple : On joue à pile ou face, et on arrête le jeu dès qu'on obtient "pile".

Notons F_i l'événement "Le jeu s'arrête avec le i-ième lancer", et F l'événement "Le jeu s'arrête".

On a alors $F =$, et les F_i étant incompatibles deux à deux, par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(F) =$$

F est donc un événement presque sûr.

On retrouve aussi la formule des probabilités totales :

Proposition 4.14 – Formule des probabilités totales

Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Alors pour tout événement F, on a

On note que dans le cas d'un univers dénombrable muni de sa tribu discrète, il suffit de donner les probabilités des singletons pour construire une probabilité par σ-additivité :

Théorème 4.15

On écrit $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une suite de réels positifs.

Alors si la série $\sum p_i$ converge et est de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

On a alors pour tout événement E :

$$\mathbb{P}(E) =$$

4.2.2 Probabilités conditionnelles

Proposition-Définition 4.16

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Alors l'application

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Cette probabilité s'appelle
, ou .

NOTA : On trouvera aussi la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour désigner $\mathbb{P}_B(A)$.

On peut reformuler la formule des probabilités totales.

Proposition 4.17 – Formule des probabilités composées

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω. Alors

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$,

- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$,

Proposition 4.18 – Formule des probabilités totales

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événements, chaque A_i ayant une probabilité non nulle. Soit B un événément.Alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

En particulier, si A et B sont des événements, A de probabilité non nulle, alors

$$\mathbb{P}(B) =$$

NOTA : On note qu'on peut affaiblir légèrement les hypothèses de cette dernière proposition. Il suffit que les A_i soient incompatibles deux à deux, et que $\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i) = 1$, en utilisant la convention

$$\mathbb{P}(A_i) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = 0.$$

Proposition 4.19 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé.

On suppose $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors

Proposition 4.20 – Formule de Bayes

Soient A et B de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_A(B) =$$

4.2.3 Indépendance

Définition 4.21

Deux événements A et B d'un espace probabilisé sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) =$$

Proposition 4.22

Soient A et B de probabilité non nulle. Alors ils sont indépendants si et seulement si

Définition 4.23

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements d'un espace probabilisé. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toute partie J de I,

On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si

Attention à ne pas confondre les différentes notions d'incompatibilité, d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle.

EXEMPLE : On considère deux dés à six faces équilibrés, un rouge et un bleu. On peut alors donner des exemples :

- il existe des événements indépendants, pas incompatibles :
- il existe des événements indépendants, incompatibles :
- il existe des événements pas indépendants, incompatibles :
- il existe des événements pas indépendants, pas incompatibles :

De plus, considérons les événements A_1 : le dé rouge est pair, A_2 : le dé bleu est pair, A_3 : la somme est impaire.

On a alors

donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants, mais pour tous i, j

4.3 Exercices

Exercice 1

On appelle *partition* d'un entier n toute suite d'entiers $a_1, \ldots, a_k$ telle que $n = a_1 + \cdots + a_k$.

On cherche la partition d'un entier quelconque maximisant le produit $\prod_{i=1}^{k} a_i$.

1. Donner ces partitions maximisant le produit pour les entiers de 2 à 9.
2. Soit $n \geqslant 5$. Soit $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ une partition de n maximisant le produit.
   Montrer que les a_i sont inférieurs ou égaux à 4.
3. Montrer qu'on peut ne prendre que des coefficients inférieurs à 3.
4. Montrer que $a_1 \geqslant 2$.
5. Montrer qu'il y a au plus deux a_i égaux à 2.
6. Conclure. *Indication : on pourra regarder le reste de n dans la division par 3.*
7. Écrire un programme Python prenant en paramètre un entier n, et renvoyant la partition (sous forme de liste) maximisant son produit.

Exercice 2

On souhaite déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2.

1. Calculer a_n pour $n = 1, 2, 3$.
2. Déterminer a_n pour tout n.
3. Montrer que pour n assez grand, on a

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\rfloor .$$

Exercice 3

On considère une marche aléatoire sur les sommets d'un carré $ABCD$. Lorsqu'on est sur un sommet, on se déplace sur un des deux sommets placés sur la même arête avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou on reste sur place avec probabilité $\frac{1}{3}$. On effectue ainsi n déplacements indépendants. On suppose qu'on se trouve initialement en A.

On pose $A_n =$ "après n déplacements on se trouve sur le sommet A", et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$. On définit de même B_n, C_n, D_n, b_n, c_n et d_n.

1. Donner un système de relations de récurrence vérifiées par a_n, b_n, c_n et d_n.

2. Écrire ce système de relations à l'aide d'une relation matricielle. On pourra poser $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$,

   et trouver M telle que $X_{n+1} = MX_n$.

3. On pose $B = 3M - I_4$, J la matrice ne contenant que des 1, et K la matrice de coefficient (i, j) $(-1)^{i+j}$.

   Montrer que
   $$B^n = 2^{n-2}J + (-1)^n 2^{n-2}K.$$

4. En déduire que

$$\begin{aligned} M^n =&\frac{1}{3^n}I_4 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)J \\ &+ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)K. \end{aligned}$$

5. En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.

6. Déterminer les limites des quatres suites. Comment peut-on l'interpréter ?

Exercice 4

On considère une urne contenant des boules noires, blanches et rouges. On tire successivement, avec remise, dans l'urne. On note B_i (resp. N_i, resp. R_i) l'événement "Le i-ième tirage est une boule blanche (resp. noire, resp. rouge)".

Exprimer les événements suivants :

1. La première boule rouge apparaît au n-ième lancer

2. Il y a une boule blanche dans la suite de boules tirées

3. On ne tire jamais de boule noire

Exercice 5

Des joueurs $A_1, \ldots, A_m \ldots$, s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2, et à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de la manche précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête dès que, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?

2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Exercice 6 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un même espace probabilisé. On note A : "une infinité d'événements parmi les A_i sont réalisés".

1. Exprimer A en fonction des A_i.
2. Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

Exercice 7

Alice et Bob jouent à un jeu. Alice lance deux fois une pièce équilibrée. Bob ne lance qu'une fois une pièce truquée, donnant Pile avec probabilité p.

Un joueur gagne la partie s'il fait strictement plus de Face que l'autre. En cas d'égalité, ils rejouent.

1. À un tour donné, quelle est la probabilité ε d'une égalité ? Quelle est la probabilité α qu'Alice gagne ? Celle β que Bob gagne ?
2. Calculer les probabilités a que Alice gagne la partie, et b que Bob gagne.
3. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
4. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?

Exercice 8

On tire un entier naturel non nul au hasard, la probabilité d'obtenir l'entier n valant $\frac{1}{2^n}$. On note alors pour tout k A_k l'événement "L'entier tiré est multiple de k".

1. Montrer qu'on a bien défini une probabilité sur $\mathbb{N}$.
2. Calculer la probabilité des événements A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $A_2 \cup A_3$.
4. Soient $p, q \geqslant 2$. Montrer que A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Exercice 9

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue une infinité de tirages dans cette urne : à chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule noire.

On note les événements

- B_n : "On tire la première boule blanche au n-ième tirage"

- N_n : "On tire la première boule noire au n-ième tirage".

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N_n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.
   b) En déduire qu'on tire presque sûrement une boule noire
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
   b) En déduire qu'on tire presque sûrement une boule blanche.

Exercice 10

On dispose d'une infinité d'urnes U_n, $n \geqslant 2$, contenant des boules noires et blanches. On tire successivement dans les urnes U_2, puis U_3, *etc.* jusqu'à obtenir une boule noire. On note A_n l'événement "On tire une boule noire dans l'urne U_n", et A l'événement "Le jeu s'arrête" :

1. On suppose que l'urne U_n contient n boules dont une noire.
   a) Calculer la probabilité de A_n.
   b) En déduire la probabilité de A.
2. On suppose que l'urne U_n contient n^2 boules dont une noire.
   a) Montrer que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2n(n-1)}$.
   b) En déduire la probabilité de A.