4 Introduction aux probabilités

4.1 Rappels de dénombrement

On rappelle dans cette partie quelques définitions et propriétés combinatoires.

Définition 4.1

On dit que deux ensembles E et F ont le même *cardinal* s 'il existe une bijection entre E et F.

On dit alors qu'un ensemble est *fini* s'il existe un entier n tel que E ait le même cardinal que $[\![1, n]\!]$; on appelle alors ce n le cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$.

On peut alors calculer les cardinaux de certains ensembles utilisant les opérations usuelles :

Proposition 4.2

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

- $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$
- $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$
- $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$

Regardons maintenant quelques objets combinatoires usuels. On se fixe un ensemble fini E de cardinal n.

Proposition-Définition 4.3

On appelle p-liste de E tout élément de E^p.

Il y a n^p p-listes de E.

On peut voir les p-listes comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, avec remise.

Proposition-Définition 4.4

On appelle p-arrangement de E toute p-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.

Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E.

On peut voir les p-arrangements comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, sans remise.

Proposition-Définition 4.5

On appelle *permutation de* E tout n-arrangement de E sans répétition.

Il y a $n!$ permutations de E.

On peut voir les permutations comme le nombre de façons d'ordonner n objets.

Proposition-Définition 4.6

On appelle p-combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-combinaisons de E.

On peut voir les p-combinaisons comme le nombre de façons de choisir p éléments parmi n, simultanément.

Pour résumer, on peut dresser le tableau suivant, qui compte le nombre de façons de choisir p éléments parmi n :

	Avec répétition	Sans répétition
Avec Ordre	p-liste n^p	p-arrangement $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Sans Ordre	p-suite $\binom{n+p-1}{p}$	p-combinaison $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

4.2 Espaces probabilisés, Tribus

4.2.1 Définition d'espace probabilisé

On va dans cette section étendre le concept d'espace probabilisé à des univers qui ne sont pas nécessairement finis.

Seules certaines parties de l'univers pourront alors avoir une probabilité : celles appartenant à une *tribu* :

Définition 4.7

Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *tribu* (ou une *σ-algèbre*) si :

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire, *i.e.*

$$\forall E \in \mathcal{T},\ \Omega \backslash E \in \mathcal{T}$$

- $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, *i.e.*

$$\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{T},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{T}.$$

Les parties de $\mathcal{T}$ sont alors appelées *événements*.

EXEMPLE : Pour un univers Ω, la *tribu grossière* $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu.

La tribu discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

NOTA : Dans le cas d'univers finis ou dénombrables, on utilise très souvent la tribu discrète.

Proposition 4.8

Soient Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Alors

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, *i.e.*

$$\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{T},\ \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{T}.$$

Fixons un peu de vocabulaire :

Définition 4.9

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$.

- Ω s'appelle *événement certain*
- $\emptyset$ s'appelle *événement impossible*
- Deux événements E et F sont *incompatibles* si $E \cap F$ est l'événement impossible.

On peut alors, comme dans le cas d'un univers fini, parler de système complet d'événements.

Définition 4.10

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'événements, avec I au plus dénombrable. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* si

- Les événements E_i sont incompatibles deux à deux, *i.e.*

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$$

- Les événements E_i recouvrent l'univers, *i.e.*

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega.$$

Il suffit maintenant de munir notre univers d'une notion de *mesure* pour pouvoir calculer des probabilités.

Définition 4.11

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall E \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(E) \geqslant 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}$ est *σ-additive*, *i.e.* pour toute famille au plus dénombrable $(E_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Un *espace probabilisé* est alors la donnée d'un univers Ω, d'une tribu $\mathcal{T}$ sur cet univers et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

NOTA : On note en particulier que la σ-additivité est vraie pour toute famille finie d'événements, et en particulier pour deux événements incompatibles :

$$\forall E, F \in \mathcal{T},\ E \cap F = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F).$$

Dans le cas d'une famille infinie dénombrable, on note que la série converge toujours : elle est à termes positifs, et est majorée par 1.

Proposition 4.12

Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{T})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{T}$. Alors

- $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance)
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Démonstration. Les preuves sont les mêmes que dans le cadre d'un univers fini. □

Définition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $E \in \mathcal{T}$.

- On dit que E est un événement presque sûr (ou presque certain) si $\mathbb{P}(E) = 1$.
- On dit que E est un événement négligeable si $\mathbb{P}(E) = 0$.

NOTA : Attention à ne pas confondre l'événement certain avec les événements presque sûrs.

EXEMPLE : On joue à pile ou face, et on arrête le jeu dès qu'on obtient "pile".

Notons F_i l'événement "Le jeu s'arrête avec le i-ième lancer", et F l'événement "Le jeu s'arrête".

On a alors $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, et les F_i étant incompatibles deux à deux, par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

F est donc un événement presque sûr.

On retrouve aussi la formule des probabilités totales :

Proposition 4.14 – Formule des probabilités totales

Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Alors pour tout événement F, on a
$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(F \cap E_i).$$

On note que dans le cas d'un univers dénombrable muni de sa tribu discrète, il suffit de donner les probabilités des singletons pour construire une probabilité par σ-additivité :

Théorème 4.15

On écrit $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une suite de réels positifs.

Alors si la série $\sum p_i$ converge et est de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

On a alors pour tout événement E :
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \omega_i\in E}} p_i.$$

4.2.2 Probabilités conditionnelles

Proposition-Définition 4.16

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Alors l'application
$$\mathbb{P}_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Cette probabilité s'appelle *probabilité conditionnelle relativement à B* , ou *probabilité sachant B* .

NOTA : On trouvera aussi la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour désigner $\mathbb{P}_B(A)$.

On peut reformuler la formule des probabilités totales.

Proposition 4.17 – Formule des probabilités composées

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω. Alors

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A).$$
- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 4.18 – Formule des probabilités totales

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système complet d'événements, chaque A_i ayant une probabilité non nulle. Soit B un événément.Alors
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

En particulier, si A et B sont des événements, A de probabilité non nulle, alors
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A}).$$

NOTA : On note qu'on peut affaiblir légèrement les hypothèses de cette dernière proposition. Il suffit que les A_i soient incompatibles deux à deux, et que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$, en utilisant la convention
$$\mathbb{P}(A_i) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = 0.$$

Proposition 4.19 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé.

On suppose $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Proposition 4.20 – Formule de Bayes

Soient A et B de probabilités non nulles. Alors
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

4.2.3 Indépendance

Définition 4.21

Deux événements A et B d'un espace probabilisé sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B).$$

Proposition 4.22

Soient A et B de probabilité non nulle. Alors ils sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ou si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 4.23

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements d'un espace probabilisé. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toute partie J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si $\forall i \neq j \in I, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

Attention à ne pas confondre les différentes notions d'incompatibilité, d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle.

EXEMPLE : On considère deux dés à six faces équilibrés, un rouge et un bleu. On peut alors donner des exemples :

- il existe des événements indépendants, pas incompatibles : le dé rouge donne un 2 et le bleu un 1
- il existe des événements indépendants, incompatibles : le dé rouge donne un 7 et le bleu un 1
- il existe des événements pas indépendants, incompatibles : le dé rouge donne un 1 et la somme des deux un 8
- il existe des événements pas indépendants, pas incompatibles : le dé rouge donne un 3 et la somme des deux un 8

De plus, considérons les événements A_1 : le dé rouge est pair, A_2 : le dé bleu est pair, A_3 : la somme est impaire.

On a alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3),$$

donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants, mais pour tous i, j

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

4.3 Exercices

Exercice 1

Soit E de cardinal n. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} A$

2. $\sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cap B)$

3. $\sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cup B)$

Réponse de l'exercice

1. On décompose la somme en

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} k &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

2. Pour une partie A fixée de cardinal p, on fixe une partie X de A, puis une partie de $E \backslash A$. On a donc

$$\sum_{B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cap B) = p2^{n-1}.$$

En sommant pour toutes les parties A, on a donc

$$\sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A \cap B) = n2^{2(n-1)}.$$

3. On utilise la relation $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$ pour trouver la troisième somme

$$3n2^{2(n-1)}.$$

Exercice 2

Soit E de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties telles que $A \subseteq B$.

2. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties distinctes telles que $A \cap B = \emptyset$.

Réponse de l'exercice

1. On a d'abord $\binom{n}{p}$ pour choisir B de cardinal p, puis 2^p choix pour choisir $A \subseteq B$. Finalement, tous les p étant possibles, on a
$$\sum_{p=0}^{n} 2^p \binom{n}{p} = (2+1)^n = 3^n$$
choix possibles.
2. De même, on choisir B de cardinal P, et il reste 2^{n-p} choix pour A. Tous les p étant possibles, on a encore
$$\sum_{p=0}^{n} 2^{n-p} \binom{n}{p} = 3^n$$
choix.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *p-partition de n* toute suite finie d'entiers $(s_1, \ldots, s_p)$ telle que $s_1 + \cdots + s_p = n$.

Montrer qu'il y a $\binom{p+n-1}{n}$ p-partitions de n.

Réponse de l'exercice

Notons s_n^p le nombre cherché.

Faisons-le par récurrence sur p :

- Pour $p = 1$, il est clair qu'il y a une seule façon d'écrire n comme somme d'un seul terme.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n^p = \binom{p+n-1}{n}$. Soit alors $a_1 + \cdots + a_{p+1}$ une décomposition de n. On va différencier suivant les valeurs de a_{p+1} ; si $a_{p+1} = n - k$, alors $a_1 + \cdots + a_p$ est une décomposition de k en p entiers. On a donc
$$s_n^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k^p.$$
On a alors, par hypothèse de récurrence, et en notant que $s_0^\ell = 1$ pour tout ℓ,
$$\begin{aligned} s_n^{p+1} &= \sum_{k=0}^{n} s_k^p \\ &= \sum_{k=0}^{n} s_k^p \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{p+k}{k} - \binom{p+k-1}{k-1} \right) \quad \text{par la formule de Pascal} \\ &= \binom{p+n}{n} \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F}_{n,p}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$. On pose
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{n,p} & \longrightarrow & \mathcal{P}_n[\![1, p]\!] \\ f & \longmapsto & \{f(1), \ldots, f(n)\} \end{array}.$$

Montrer que φ est bijective, et calculer le cardinal de $\mathcal{F}$.

En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ (on pourra considérer la fonction qui a une fonction croissante f associe la fonction g définie par $g(k) = f(k) + k - 1$).

Réponse de l'exercice

Soient f et g dans $\mathcal{F}_{n,p}$. Alors $\{f(1), \ldots, f(n)\}$ et $\{g(1), \ldots, g(n)\}$ ayant les mêmes éléments, ils ont le même minimum : $f(1) = g(1)$. Une récurrence immédiate conclut que $f = g$, et donc φ est injective.

Maintenant, si $X \in \mathcal{P}_n([\![1,p]\!])$, en ordonnant ses éléments, on peut facilement construire une fonction strictement croissante dont l'image est exactement X.

Finalement, $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_{n,p}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_n([\![1,p]\!])) = \binom{p}{n}$.

Notons $\mathcal{E}_{n,p}$ l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Soit

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{n,p} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{n,n+p-1} \\ f & \longmapsto & \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+p-1]\!] \\ k & \longmapsto & f(k)+k-1 \end{array} \end{array} .$$

La fonction ψ est bien définie : $\psi(f)(k+1) - \psi(f)(k) = f(k+1) + k - f(k) - k + 1 > 0$.

Soit maintenant la fonction

$$\eta : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{n,n+p-1} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n,p} \\ g & \longmapsto & \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & g(k)-k+1 \end{array} \end{array} .$$

La fonction η est bien définie : $\eta(g)(k+1) - \eta(g)(k) = g(k+1) - k - g(k) + k - 1 \geqslant 0$.

On note alors que les deux fonctions ψ et η sont réciproques l'une de l'autre, et donc sont bijectives.

Il y a donc autant de fonctions croissantes dans $\mathcal{E}_{n,p}$ que de fonctions strictement croissantes dans $\mathcal{F}_{n,n+p-1}$, soit $\binom{n+p-1}{n}$.

Exercice 5

Une urne A contient une boule rouge et deux boules noires. Une urne B contient trois rouges et une noire. Au départ, on choisit une urne, la probabilité de choisir A étant $p \in]0,1[$. Puis on choisit une boule dans cette urne. Si, à un tirage quelconque, on a tiré une boule rouge, le tirage suivant se fait dans A, sinon dans B. Les tirages se font avec remise. On note p_n la probabilité de choisir une boule rouge au tirage numéro n.

Calculer p_1, puis calculer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n, puis la limite de (p_n).

Réponse de l'exercice

Le premier tirage étant dans l'urne A, on a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ d'avoir une boule rouge. Ensuite, en notant A_n (resp. B_n) l'événement "le n-ième tirage se fait dans l'urne A (resp. B)". $\{A_n, B_n\}$ est un système complet d'événement, et donc

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(B_n) \\ &= \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{12}p_n \end{aligned}$$

On a donc une suite arithmético-géométrique : la suite $\left(p_n - \frac{9}{17}\right)$ est géométrique, et on a donc pour tout n

$$p_n = \frac{9}{17} + \left(p_1 - \frac{9}{17}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1} = \frac{9}{17} - \frac{10}{51}\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

Quand $n \to \infty$, la suite (p_n) converge donc vers $\frac{9}{17}$.

Exercice 6

On considère une urne contenant des boules noires, blanches et rouges. On tire successivement, avec remise, dans l'urne. On note B_i (resp. N_i, resp. R_i) l'événement "Le i-ième tirage est une boule blanche (resp. noire, resp. rouge)".

Exprimer les événements suivants :

1. La première boule rouge apparaît au n-ième lancer
2. Il y a une boule blanche dans la suite de boules tirées
3. On ne tire jamais de boule noire

Réponse de l'exercice

1. $R_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (N_i \cup B_i)$
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$
3. $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i}$

Exercice 7

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

- dans U_1, on a 3 boules blanches et 1 noire
- dans U_2, on a 1 boule blanche et 3 noires.

On lance une pièce truquée, donnant Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On la lance jusqu'à obtenir Face.

- si le nombre de lancers est impair, on tire une boule dans U_1
- sinon, on tire une boule dans U_2.

1. Montrer qu'on tirera presque sûrement dans une des deux urnes.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

3. Montrer que quelque soit p, on a strictement plus de chance de tirer une boule blanche qu'une boule noire.

Réponse de l'exercice

1. La probabilité de ne faire que des Pile avec la pièce est nulle, et on aura donc presque sûrement un Face.
2. Notons B : "on tire une boule blanche" et A_n : "le premier Face apparaît au n-ième lancer".

   On a alors, par formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B \cap A_{2m}) = p^{2m-1}q\frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(B \cap A_{2m+1}) = p^{2m}q\frac{3}{4}$$
   On a alors, par formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{2m}) + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{2m+1}) \\ &= \frac{3q}{4p} \sum_{m=1}^{\infty} p^{2m} + \frac{3q}{4} \sum_{m=0}^{\infty} p^{2m} \\ &= \frac{3+p}{4(1+p)}\end{aligned}$$
3. L'étude de la fonction précédente donne un minimum pour $p = 1$, qui vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 8 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un même espace probabilisé. On note A : "une infinité d'événements parmi les A_i sont réalisés".

1. Exprimer A en fonction des A_i.
2. Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

Réponse de l'exercice

1. On a $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.
2. On note que pour tout n,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \\ &\to 0\end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 0$.

Exercice 9 Paradoxe de Penney, partie I

Dans ce jeu, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Deux joueurs Walter et Herman jouent au jeu suivant :

- Si la suite de lancers "Pile, Pile, Face" apparaît, le jeu s'arrête et Walter gagne.
- Si la suite de lancers "Face, Pile, Pile" apparaît, le jeu s'arrête et Herman gagne.

1. Pour $n \geqslant 3$, on note W_n l'événement "Les lancers $n-2$, $n-1$ et n ont lieu et donnent respectivement Pile, Pile et Face".
   a) Calculer $\mathbb{P}(W_3)$ et $\mathbb{P}(W_4)$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $\mathbb{P}(W_n) = \frac{1}{2^n}$.
   c) En déduire la probabilité que Walter gagne.
2. Notons maintenant d_n la probabilité que lors des n premiers lancers, il n'y ait pas deux Pile consécutifs.
   a) Calculer d_0 et d_1.
   b) Montrer que pour tout n
   $$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$
   c) En déduire une expression explicite de (d_n).
3. Pour $n \geqslant 3$, on note G_n l'événement "Un joueur est déclaré vainqueur exactement à l'issue du n-ième lancer", H_n l'événement "Les lancers $n-2$, $n-1$ et n ont lieu et donnent respectivement Face, Pile, Pile".
   a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, la probabilité qu'aucun joueur ne soit déclaré gagnant avant ou à l'issue du n-ième lancer est $\frac{1}{2^n} + d_n$.
   b) En déduire que pour $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$
   c) Montrer que la partie s'arrêtera presque sûrement.
   d) En déduire la probabilité que Herman gagne.
4. Proposer un programme Python simulant ce jeu, et vérifiant les résultats trouvés.
5. Proposer un programme Python calculant le temps moyen avant de voir apparaître Pile,Pile,Face, et le temps moyen avant de voir apparaître Face,Pile,Pile.

Réponse de l'exercice

1. a) Il est clair que $\mathbb{P}(W_3) = \frac{1}{8}$. Pour W_4, on peut lister tous les tirages possibles de quatre pièces, pour voir que $\mathbb{P}(W_4) = \frac{1}{16}$.
   b) On note que le seul moyen pour Walter de gagner à l'issue du n-ième tirage et d'avoir tiré $n-1$ Pile consécutifs, puis un Face. En effet, si un Face est tiré avant, Herman est sûr de gagner avant Walter. On a donc bien $\mathbb{P}(W_n) = \frac{1}{2^n}$.

c) Les événements étant indépendants, la probabilité que Walter gagne est donc

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}.$$

2. a) Il est clair que $d_0 = d_1 = 1$.

b) Notons P_n (resp. F_n) l'événement "Le n-ième lancer donne Pile (resp. Face)". On a alors, par la formule des probabilités totales

$$d_{n+2} = \mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2})\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2})\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}).$$

Il est clair que $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = d_{n+1}$.
On a de plus

$$\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) = \mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(D_{n+2})\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(D_{n+2})\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}d_n.$$

On retrouve bien la relation demandée.

c) On résout la récurrence pour trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

3. a) Deux cas sont possibles pour qu'il n'y ait pas de gagnant au n-ième tirage

- soit on n'a tiré que des Pile : probabilité $\frac{1}{2^n}$
- soit on n'a jamais tiré deux Pile successifs : probabilité d_n

Ces deux cas étant incompatibles, on retrouve la relation.

b) On a donc, en notant $\hat{G}_n$ l'événement "Il y a un gagnant avant ou à l'issue du n-ième lancer" :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_n) &= \mathbb{P}(\overline{\hat{G}_{n-1}}) - \mathbb{P}(\overline{\hat{G}_n}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n \\ &= \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\end{aligned}$$

c) La probabilité qu'un joueur soit déclaré gagnant vaut alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=3}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

d) Les trois cas possibles, deux à deux incompatibles, sont :

- la partie ne s'arrête jamais : probabilité 0
- Walter gagne : probabilité $\frac{1}{4}$
- Herman gagne : probabilité $1 - 0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as rd

def PF():
    return rd.randint(0,1)
```

```

def jeu():
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[0,1,1] or l==[1,1,0]):
        l.pop(0); l.append(PF())
    if l == [0,1,1]: return 1
    else: return 0

def penney(N):
    res = [0,0]
    for _ in range(N):
        res[jeu()] += 1/N
    plt.clf()
    plt.bar([0,1],res)
    plt.xticks=([0,1],('Walter','Herman'))
    plt.show()
    return res

```

5.

```
def Temps110():
    n=3
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[1,1,0]):
        l.pop(0); l.append(PF())
        n+=1
    return n

def Temps011():
    n=3
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[0,1,1]):
        l.pop(0); l.append(PF())
        n+=1
    return n

def compareTemps(N):
    E110 = 0
    E011 = 0
    for _ in range(N):
        E110 += Temps110()/N
        E011 += Temps011()/N
    return E110,E011

```