# 4 Introduction aux probabilités

## 4.1 Rappels de dénombrement

On rappelle dans cette partie quelques définitions et propriétés combinatoires.

**Définition 4.1**

On dit que deux ensembles $E$ et $F$ ont le même *cardinal* s 'il existe une bijection entre $E$ et $F$.

On dit alors qu'un ensemble est *fini* s'il existe un entier $n$ tel que $E$ ait le même cardinal que $[\![1, n]\!]$ ; on appelle alors ce $n$ le cardinal de $E$, noté $\mathrm{Card}(E)$.

On peut alors calculer les cardinaux de certains ensembles utilisant les opérations usuelles :

**Proposition 4.2**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors

- $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$
- $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$
- $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$

Regardons maintenant quelques objets combinatoires usuels. On se fixe un ensemble fini $E$ de cardinal $n$.

**Proposition-Définition 4.3**

On appelle $p$-liste de $E$ tout élément de $E^p$.

Il y a $n^p$ $p$-listes de $E$.

On peut voir les $p$-listes comme le nombre de façons de choisir $p$ éléments parmi $n$, avec remise.

**Proposition-Définition 4.4**

On appelle $p$-arrangement de $E$ toute $p$-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.

Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ $p$-arrangements de $E$.

On peut voir les $p$-arrangements comme le nombre de façons de choisir $p$ éléments parmi $n$, sans remise.

**Proposition-Définition 4.5**

On appelle *permutation de* $E$ tout $n$-arrangement de $E$ sans répétition.

Il y a $n!$ permutations de $E$.

On peut voir les permutations comme le nombre de façons d'ordonner $n$ objets.

**Proposition-Définition 4.6**

On appelle $p$-combinaison de $E$ toute partie de $E$ à $p$ éléments.

Il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $p$-combinaisons de $E$.

On peut voir les $p$-combinaisons comme le nombre de façons de choisir $p$ éléments parmi $n$, simultanément.

Pour résumer, on peut dresser le tableau suivant, qui compte le nombre de façons de choisir $p$ éléments parmi $n$ :

| | Avec répétition | Sans répétition |
|---|---|---|
| Avec Ordre | $p$-liste<br>$n^p$ | $p$-arrangement<br>$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ |
| Sans Ordre | $p$-suite<br>$\binom{n+p-1}{p}$ | $p$-combinaison<br>$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ |

## 4.2 Espaces probabilisés, Tribus

### 4.2.1 Définition d'espace probabilisé

On va dans cette section étendre le concept d'espace probabilisé à des univers qui ne sont pas nécessairement finis.

Seules certaines parties de l'univers pourront alors avoir une probabilité : celles appartenant à une *tribu* :

**Définition 4.7**

Soit $\Omega$ un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *tribu* (ou une *$\sigma$-algèbre*) si :

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire, *i.e.*

$$\forall E \in \mathcal{T},\ \Omega \backslash E \in \mathcal{T}$$

- $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, *i.e.*

$$\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{T},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{T}.$$

Les parties de $\mathcal{T}$ sont alors appelées *événements*.

**EXEMPLE :** Pour un univers $\Omega$, la *tribu grossière* $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu.

La tribu discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

**NOTA :** Dans le cas d'univers finis ou dénombrables, on utilise très souvent la tribu discrète.

**Proposition 4.8**

Soient $\Omega$ un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$. Alors

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, *i.e.*

$$\forall E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{T},\ \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{T}.$$

Fixons un peu de vocabulaire :

### Définition 4.9

Soit $\Omega$ un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$.

- $\Omega$ s'appelle *événement certain*
- $\varnothing$ s'appelle *événement impossible*
- Deux événements $E$ et $F$ sont *incompatibles* si $E \cap F$ est l'événement impossible.

On peut alors, comme dans le cas d'un univers fini, parler de système complet d'événements.

### Définition 4.10

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'événements, avec $I$ au plus dénombrable. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* si

- Les événements $E_i$ sont incompatibles deux à deux, *i.e.*
$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$$
- Les événements $E_i$ recouvrent l'univers, *i.e.*
$$\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega.$$

Il suffit maintenant de munir notre univers d'une notion de *mesure* pour pouvoir calculer des probabilités.

### Définition 4.11

Soit $\Omega$ un univers muni d'une tribu $\mathcal{T}$. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ tout application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall E \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(E) \geqslant 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}$ est *$\sigma$-additive*, *i.e.* pour toute famille au plus dénombrable $(E_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Un *espace probabilisé* est alors la donnée d'un univers $\Omega$, d'une tribu $\mathcal{T}$ sur cet univers et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

**NOTA :** On note en particulier que la $\sigma$-additivité est vraie pour toute famille finie d'événements, et en particulier pour deux événements incompatibles :

$$\forall E, F \in \mathcal{T},\ E \cap F = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F).$$

Dans le cas d'une famille infinie dénombrable, on note que la série converge toujours : elle est à termes positifs, et est majorée par 1.

### Proposition 4.12

Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{T})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{T}$. Alors

- $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance)
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

*Démonstration.* Les preuves sont les mêmes que dans le cadre d'un univers fini. □

### Définition 4.13

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $E \in \mathcal{T}$.

- On dit que $E$ est un événement presque sûr (ou presque certain) si $\mathbb{P}(E) = 1$.
- On dit que $E$ est un événement négligeable si $\mathbb{P}(E) = 0$.

**NOTA :** Attention à ne pas confondre l'événement certain avec les événements presque sûrs.

**EXEMPLE :** On joue à pile ou face, et on arrête le jeu dès qu'on obtient "pile".

Notons $F_i$ l'événement "Le jeu s'arrête avec le $i$-ième lancer", et $F$ l'événement "Le jeu s'arrête".

On a alors $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, et les $F_i$ étant incompatibles deux à deux, par $\sigma$-additivité,

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

$F$ est donc un événement presque sûr.

On retrouve aussi la formule des probabilités totales :

**Proposition 4.14 – Formule des probabilités totales**

Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Alors pour tout événement $F$, on a
$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(F \cap E_i).$$

On note que dans le cas d'un univers dénombrable muni de sa tribu discrète, il suffit de donner les probabilités des singletons pour construire une probabilité par $\sigma$-additivité :

**Théorème 4.15**

On écrit $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une suite de réels positifs.

Alors si la série $\sum p_i$ converge et est de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

On a alors pour tout événement $E$ :
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \omega_i\in E}} p_i.$$

### 4.2.2 Probabilités conditionnelles

**Proposition-Définition 4.16**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Alors l'application
$$\mathbb{P}_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Cette probabilité s'appelle *probabilité conditionnelle relativement à $B$*, ou *probabilité sachant $B$*.

**NOTA :** On trouvera aussi la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour désigner $\mathbb{P}_B(A)$.

On peut reformuler la formule des probabilités totales.

**Proposition 4.17 – Formule des probabilités composées**

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $\Omega$. Alors

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A).$$
- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B).$$

**Proposition 4.18**

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événements, chaque $A_i$ ayant une probabilité non nulle. Soit $B$ un événément.Alors
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

En particulier, si $A$ et $B$ sont des événements, $A$ de probabilité non nulle, alors
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A}).$$

**Nota :** On note qu'on peut affaiblir légèrement les hypothèses de cette dernière proposition. Il suffit que les $A_i$ soient incompatibles deux à deux, et que $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$, en utilisant la convention
$$\mathbb{P}(A_i) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = 0.$$

**Proposition 4.19 – Formule des probabilités composées**

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé.

On suppose $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

**Proposition 4.20 – Formule de Bayes**

Soient $A$ et $B$ de probabilités non nulles. Alors
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

### 4.2.3 Indépendance

**Définition 4.21**

Deux événements $A$ et $B$ d'un espace probabilisé sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B).$$

### Proposition 4.22

Soient $A$ et $B$ de probabilité non nulle. Alors ils sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ou si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

### Définition 4.23

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements d'un espace probabilisé. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J$ de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit qu'ils sont deux à deux indépendants si $\forall i \neq j \in I, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

## 4.3 Exercices

### Exercice 1

On appelle *partition* d'un entier $n$ toute suite d'entiers $a_1, \dots, a_k$ telle que $n = a_1 + \cdots + a_k$.

On cherche la partition d'un entier quelconque maximisant le produit $\prod_{i=1}^{k} a_i$.

1. Donner ces partitions maximisant le produit pour les entiers de 2 à 9.
2. Soit $n \geqslant 5$. Soit $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ une partition de $n$ maximisant le produit.

   Montrer que les $a_i$ sont inférieurs ou égaux à 4.
3. Montrer qu'on peut ne prendre que des coefficients inférieurs à 3.
4. Montrer que $a_1 \geqslant 2$.
5. Montrer qu'il y a au plus deux $a_i$ égaux à 2.
6. Conclure. *Indication : on pourra regarder le reste de n dans la division par 3.*
7. Écrire un programme Python prenant en paramètre un entier $n$, et renvoyant la partition (sous forme de liste) maximisant son produit.

### Réponse de l'exercice

1. On peut écrire
   - $2 = 2$
   - $3 = 3$
   - $4 = 2 + 2$
   - $5 = 2 + 3$
   - $6 = 3 + 3$
   - $7 = 2 + 2 + 3$
   - $8 = 2 + 3 + 3$
   - $9 = 3 + 3 + 3$
2. Supposons qu'il existe un $a_i$ supérieur ou égal à 5. Alors, en remplaçant ce $a_i$ par $3 + (a_i - 3)$, ce facteur augemente le produit $3(a_i - 3) = 3a_i - 9 = a_i + (2a_i - 9) > a_i$.
3. Si un coefficient vaut 4, on peut le remplacer sans changement par $2 + 2$.
4. S'il y avait trois $a_i$ égaux à 2, alors on pourrait les remplacer par $3 + 3$, ce qui augmenterait le produit.
5. Finalement, on a les décomposition suivantes :
   - si $n = 3p$, alors $n = 3 + 3 + \cdots + 3$, 3 apparaissant 3 fois
   - si $n = 3p + 1$, alors $n = 2 + 2 + 3 + \cdots + 3$, 3 apparaissant $p - 1$ fois

- si $n = 3p+2$, alors $n = 2+3+\cdots+3$, 3 apparaissant $p$ fois.

6. On peut écrire le programme suivant :

```
def decomposition(n):
    p = n//3
    if n%3 == 0:
        return *[3]
    elif n%3 == 1:
        return [2,2]+(p-1)*[3]
    else:
        return [2]+p*[3]
```

### Exercice 2

On souhaite déterminer le nombre $a_n$ de manières de recouvrir un damier de dimension $2\times n$ avec des pièces de dimension $1\times 2$.

1. Calculer $a_n$ pour $n = 1, 2, 3$.
2. Déterminer $a_n$ pour tout $n$.
3. Montrer que pour $n$ assez grand, on a

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right\rfloor.$$

#### Réponse de l'exercice

1. On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.
2. Considérons un damier de taille $n-2\times 2$. Alors deux cas se présentent :
   - si le carré en haut à gauche est occupé par un domino vertical, il reste un damier de taille $n-1\times 2$ à recouvrir
   - si le carré en haut à gauche est recouvert par un domino horizontal, alors le carré en bas à gauche aussi, et il reste un damier de taille $n\times 2$ à recouvrir.

   Finalement, on obtient la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
   On reconnaît une suite linéaire d'ordre 2, et on trouve :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}\right),$$

   avec $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $\overline{\phi} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.
3. Posons alors $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - a_n$. Alors $(u_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$, et sa partie entière est donc nulle à partir d'un certain rang. D'où le résultat cherché, $a_n$ étant un entier.

## Exercice 3

On considère une marche aléatoire sur les sommets d'un carré $ABCD$. Lorsqu'on est sur un sommet, on se déplace sur un des deux sommets placés sur la même arête avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou on reste sur place avec probabilité $\frac{1}{3}$. On effectue ainsi $n$ déplacements indépendants. On suppose qu'on se trouve initialement en $A$.

On pose $A_n$ = "après $n$ déplacements on se trouve sur le sommet $A$", et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$. On définit de même $B_n$, $C_n$, $D_n$, $b_n$, $c_n$ et $d_n$.

1. Donner un système de relations de récurrence vérifiées par $a_n$, $b_n$, $c_n$ et $d_n$.
2. Écrire ce système de relations à l'aide d'une relation matricielle. On pourra poser $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$,

   et trouver $M$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
3. On pose $B = 3M - I_4$, $J$ la matrice ne contenant que des 1, et $K$ la matrice de coefficient $(i, j)$ $(-1)^{i+j}$.

   Montrer que
   $$B^n = 2^{n-2}J + (-1)^n 2^{n-2}K.$$
4. En déduire que
   $$\begin{aligned} M^n =& \frac{1}{3^n} I_4 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) J \\ &+ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) K. \end{aligned}$$
5. En déduire l'expression de $a_n$, $b_n$, $c_n$ et $d_n$ en fonction de $n$.
6. Déterminer les limites des quatres suites. Comment peut-on l'interpréter ?

### Réponse de l'exercice

1. On a par exemple
   $$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + d_n).$$
   On trouve en fait le système
   $$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + d_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n) \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n + d_n) \end{cases}$$
2. On peut alors écrire
   $$X_{n+1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_n.$$

3. On a donc
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrons la formule donnée par récurrence :
   - pour $n = 1$, on a bien $B = \frac{1}{2}(J - K)$.
   - soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; on suppose $B^n = 2^{n-2}J + (-1)^n 2^{n-2}K$. On note que
$$BJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2J$$
et
$$BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2K.$$
On a alors
$$\begin{aligned} B^{n+1} &= BB^n \\ &= 2^{n-2}BJ + (-1)^n 2^{n-2}BK \\ &= 2^{n-1}J + (-1)^{n+1}2^{n-1}K \end{aligned}$$

4. On a $M = \frac{1}{3}(B + I_4)$, et les matrices commutant, par le binôme de Newton
$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{3^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k\right) \\ &= \frac{1}{3^n}\left(I_4 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B^k\right) \\ &= \frac{1}{3^n}\left(I_4 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-2}J + (-1)^k 2^{k-2}K\right) \\ &= \frac{1}{4\times 3^n}\left(4I_4 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^kJ + (-1)^k 2^k K\right) \\ &= \frac{1}{4\times 3^n}\left(4I_4 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^kJ + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 2^k K\right) \\ &= \frac{1}{4\times 3^n}\left(4I_4 + (3^n - 1)J + ((-1)^n - 1)K\right) \\ &= \frac{1}{3^n}I_4 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)J + \frac{1}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right))^n - \frac{1}{3^n}\right)K \end{aligned}$$

5. On note que $X_0 = (1, 0, 0, 0)$, et que pour tout $n$
$$X_n = M^n X_0.$$

On a donc, après calculs

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4\times 3^n}\left(3^n + 2 + (-1)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{4\times 3^n}\left(3^n - (-1)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{4\times 3^n}\left(3^n - 2 + (-1)^n\right) \\ d_n = \frac{1}{4\times 3^n}\left(3^n + (-1)^n\right) \end{cases}$$

6. Les quatre suites tendent donc vers $\frac{1}{4}$. Au bout d'un certain temps, les probabilités d'être sur n'importe lequel des sommets sont donc les mêmes.

## Exercice 4

On considère une urne contenant des boules noires, blanches et rouges. On tire successivement, avec remise, dans l'urne. On note $B_i$ (resp. $N_i$, resp. $R_i$) l'événement "Le $i$-ième tirage est une boule blanche (resp. noire, resp. rouge)".

Exprimer les événements suivants :

1. La première boule rouge apparaît au $n$-ième lancer
2. Il y a une boule blanche dans la suite de boules tirées
3. On ne tire jamais de boule noire

### Réponse de l'exercice

1. $R_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (N_i \cup B_i)$
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$
3. $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i}$

## Exercice 5

Des joueurs $A_1, \ldots, A_m \ldots,$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose $A_1$ et $A_2$, et à l'étape $n$, si elle a lieu, le gagnant de la manche précédente affronte le joueur $A_{n+1}$. Le jeu s'arrête dès que, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape $n$ ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur $A_n$ gagne ?

### Réponse de l'exercice

1. Notons $E_n$ l'événement "la $n$-ième manche a lieu". On a alors $\mathbb{P}(E_1) = 1$ et $\mathbb{P}(E_2) = 1$.

   De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{2}$, et donc, comme $E_{n+1} \subseteq E_n$, on a $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_n)$.

   Finalement, on a $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.
2. Notons $S_n$ l'événement "le jeu s'arrête exactement à l'étape $n$". On a alors

$$\mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

   La probabilité que le jeu s'arrête est donc donnée par, par incompatibilité des $S_n$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} F_n\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(F_n)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1\end{aligned}$$

3. Soit $n \geqslant 3$. La probabilité que $A_n$ joue au jeu est $\mathbb{P}(E_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-3}}$. La probabilité qu'il joue et gagne sera donc de $\frac{1}{4}\frac{1}{2^{n-3}} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

   Les probabilités que les joueur $A_1$ et $A_2$ gagnent est de $\frac{1}{4}$.

## Exercice 6

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.

- dans $U_1$, on a 3 boules blanches et 1 noire
- dans $U_2$, on a 1 boule blanche et 3 noires.

On lance une pièce truquée, donnant Pile avec probabilité $p \in ]0,1[$. On la lance jusqu'à obtenir Face.

- si le nombre de lancers est impair, on tire une boule dans $U_1$
- sinon, on tire une boule dans $U_2$.

1. Montrer qu'on tirera presque sûrement dans une des deux urnes.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
3. Montrer que quelque soit $p$, on a strictement plus de chance de tirer une boule blanche qu'une boule noire.

### Réponse de l'exercice

1. La probabilité de ne faire que des Pile avec la pièce est nulle, et on aura donc presque sûrement un Face.

2. Notons $B$ : "on tire une boule blanche" et $A_n$ : "le premier Face apparaît au $n$-ième lancer".
   On a alors, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B \cap A_{2m}) = p^{2m-1} q \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(B \cap A_{2m+1}) = p^{2m} q \frac{3}{4}$$

   On a alors, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{2m}) + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{2m+1}) \\ &= \frac{3q}{4p} \sum_{m=1}^{\infty} p^{2m} + \frac{3q}{4} \sum_{m=0}^{\infty} p^{2m} \\ &= \frac{3+p}{4(1+p)} \end{aligned}$$

3. L'étude de la fonction précédente donne un minimum pour $p = 1$, qui vaut $\frac{1}{2}$.

## Exercice 7 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un même espace probabilisé. On note $A$ : "une infinité d'événements parmi les $A_i$ sont réalisés".

1. Exprimer $A$ en fonction des $A_i$.
2. Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

### Réponse de l'exercice

1. On a $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.
2. On note que pour tout $n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 0$.

## Exercice 8

Alice et Bob jouent à un jeu. Alice lance deux fois une pièce équilibrée. Bob ne lance qu'une fois une pièce truquée, donnant Pile avec probabilité $p$.

Un joueur gagne la partie s'il fait strictement plus de Face que l'autre. En cas d'égalité, ils rejouent.

1. À un tour donné, quelle est la probabilité $\varepsilon$ d'une égalité ? Quelle est la probabilité $\alpha$ qu'Alice gagne ? Celle $\beta$ que Bob gagne ?

2. Calculer les probabilités $a$ que Alice gagne la partie, et $b$ que Bob gagne.

3. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

4. Pour quelle valeur de $p$ le jeu est-il équitable ?

### Réponse de l'exercice

1. On a une égalité si et seulement si Alice et Bob font tous les deux 0 ou 1 Face.
   La probabilité qu'ils fassent tous les deux 0 Face est de $\frac{1}{2}\frac{1}{2}p = \frac{p}{4}$, et la probabilité qu'ils fassent tous les deux 1 Face est de $\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p) = \frac{1-p}{2}$.
   On a finalement par incompatibilité $\varepsilon = \frac{2-p}{4}$.
   De même, en énumérant les cas possibles, on trouve $\alpha = \frac{1+2p}{4}$ et $\beta = \frac{1-p}{4}$.
2. Par la formule des probabilités composées, la probabilité qu'Alice gagne la partie lors de la $n$-ième étape est, en notant $E_i$ l'événement "Il y a égalité au tour $i$ et $A_i$ l'événement "Alice gagne au tour $i$" :
   $$\mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap N\mathbb{E}_{n-1} \cap A_n) = \varepsilon^{n-1}\alpha.$$
   Ces événements sont incompatibles deux à deux, et la probabilité $a$ vaut donc
   $$a = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1}\alpha = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} = \frac{1+2p}{2+p}.$$
   De même, on montre que $b = \frac{\beta}{1-\varepsilon} = \frac{1-p}{2+p}$.
3. On a $a + b = 1$, donc le jeu s'arrête presque sûrement.
4. Le jeu est équitable si et seulement si $a = b$, *i.e.* si et seulement si $p = 0$.

## Exercice 9 Paradoxe de Penney, partie I

Dans ce jeu, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Deux joueurs Walter et Herman jouent au jeu suivant :

- Si la suite de lancers "Pile, Pile, Face" apparaît, le jeu s'arrête et Walter gagne.
- Si la suite de lancers "Face, Pile, Pile" apparaît, le jeu s'arrête et Herman gagne.

1. Pour $n \geqslant 3$, on note $W_n$ l'événement "Les lancers $n-2$, $n-1$ et $n$ ont lieu et donnent respectivement Pile, Pile et Face".
   a) Calculer $\mathbb{P}(W_3)$ et $\mathbb{P}(W_4)$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $\mathbb{P}(W_n) = \frac{1}{2^n}$.
   c) En déduire la probabilité que Walter gagne.

2. Notons maintenant $d_n$ la probabilité que lors des $n$ premiers lancers, il n'y ait pas deux Pile consécutifs.

   a) Calculer $d_0$ et $d_1$.

   b) Montrer que pour tout $n$
   $$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

   c) En déduire une expression explicite de $(d_n)$.

3. Pour $n \geqslant 3$, on note $G_n$ l'événement "Un joueur est déclaré vainqueur exactement à l'issue du $n$-ième lancer", $H_n$ l'événement "Les lancers $n-2$, $n-1$ et $n$ ont lieu et donnent respectivement Face, Pile, Pile".

   a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, la probabilité qu'aucun joueur ne soit déclaré gagnant avant ou à l'issue du $n$-ième lancer est $\frac{1}{2^n} + d_n$.

   b) En déduire que pour $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$

   c) Montrer que la partie s'arrêtera presque sûrement.

   d) En déduire la probabilité que Herman gagne.

4. Proposer un programme Python simulant ce jeu, et vérifiant les résultats trouvés.

5. Proposer un programme Python calculant le temps moyen avant de voir apparaître Pile,Pile,Face, et le temps moyen avant de voir apparaître Face,Pile,Pile.

### Réponse de l'exercice

1. a) Il est clair que $\mathbb{P}(W_3) = \frac{1}{8}$. Pour $W_4$, on peut lister tous les tirages possibles de quatre pièces, pour voir que $\mathbb{P}(W_4) = \frac{1}{16}$.

   b) On note que le seul moyen pour Walter de gagner à l'issue du $n$-ième tirage et d'avoir tiré $n-1$ Pile consécutifs, puis un Face. En effet, si un Face est tiré avant, Herman est sûr de gagner avant Walter. On a donc bien $\mathbb{P}(W_n) = \frac{1}{2^n}$.

   c) Les événements étant indépendants, la probabilité que Walter gagne est donc
   $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}.$$

2. a) Il est clair que $d_0 = d_1 = 1$.

   b) Notons $P_n$ (resp. $F_n$) l'événement "Le $n$-ième lancer donne Pile (resp. Face)". On a alors, par la formule des probabilités totales
   $$d_{n+2} = \mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2})\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2})\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}).$$
   Il est clair que $\mathbb{P}_{F_1}(D_{n+2}) = d_{n+1}$.
   On a de plus
   $$\mathbb{P}_{P_1}(D_{n+2}) = \mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(D_{n+2})\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(D_{n+2})\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}d_n.$$
   On retrouve bien la relation demandée.

c) On résout la récurrence pour trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$d_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

3. a) Deux cas sont possibles pour qu'il n'y ait pas de gagnant au $n$-ième tirage
   - soit on n'a tiré que des Pile : probabilité $\frac{1}{2^n}$
   - soit on n'a jamais tiré deux Pile successifs : probabilité $d_n$

   Ces deux cas étant incompatibles, on retrouve la relation.

   b) On a donc, en notant $\hat{G}_n$ l'événement "Il y a un gagnant avant ou à l'issue du $n$-ième lancer" :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_n) &= \mathbb{P}(\overline{\hat{G}_{n-1}}) - \mathbb{P}(\overline{\hat{G}_n}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n \\ &= \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\end{aligned}$$

   c) La probabilité qu'un joueur soit déclaré gagnant vaut alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=3}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

   d) Les trois cas possibles, deux à deux incompatibles, sont :
   - la partie ne s'arrête jamais : probabilité 0
   - Walter gagne : probabilité $\frac{1}{4}$
   - Herman gagne : probabilité $1 - 0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as rd

def PF():
    return rd.randint(0,1)

def jeu():
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[0,1,1] or l==[1,1,0]):
        l.pop(0); l.append(PF())
    if l == [0,1,1]: return 1
    else: return 0

def penney(N):
    res = [0,0]
    for _ in range(N):
        res[jeu()] += 1/N
    plt.clf()
    plt.bar([0,1],res)
    plt.xticks=([0,1],('Walter','Herman'))
    plt.show()
    return res

```

5.

```python
def Temps110():
    n=3
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[1,1,0]):
        l.pop(0); l.append(PF())
        n+=1
    return n

def Temps011():
    n=3
    l=[PF(),PF(),PF()]
    while not (l==[0,1,1]):
        l.pop(0); l.append(PF())
        n+=1
    return n

def compareTemps(N):
    E110 = 0
    E011 = 0
    for _ in range(N):
        E110 += Temps110()/N
        E011 += Temps011()/N
    return E110,E011
```