

5 Intégration sur un intervalle quelconque

5.1 Intégration sur un segment

Commençons par rappeler la définition d'une intégrale sur un segment.

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On appelle *intégrale de f entre a et b*

On note ce réel $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t) dt$, la variable t étant muette.

Théorème 5.2 – Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors les suites

$$\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_n$$

convergent toutes les deux, vers

NOTA : On utilise en général ce théorème pour calculer des sommes, en prenant $a = 0$ et $b = 1$.
On a alors

En pratique, on utilise souvent le théorème suivant :

Théorème 5.3 – fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors pour tout $a \in I$, la fonction

est la primitive de f qui s'annule en a .

En particulier, pour tous $a < b \in I$ et toute primitive F de f sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t) \, dt =$$

Résumons les propriétés de l'intégrale, avec des notations évidentes :

Proposition 5.4

L'intégrale sur un segment vérifie les propriétés suivantes :

- Linéarité :
- Relation de Chasles :
- Inégalité triangulaire :
- Positivité :
- Croissance :
- Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction positive :

On a alors deux résultats pour nous aider à calculer des intégrales :

Théorème 5.5 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

Théorème 5.6 – Changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

5.2 Intégration sur un intervalle quelconque

5.2.1 Définitions

On veut maintenant pouvoir, dans certains cas, étendre la définition d'intégrale à des fonctions définies sur des intervalles quelconques (ouverts, fermés ou semi-ouverts).

Définition 5.7

Soit $I = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *convergente* si

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt =$$

Sinon, on dit que l'intégrale est

On définit de la même façon la convergence d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert à gauche.

Définition 5.8

Soit $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ non vide. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, pour un $c \in I$, les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent.

NOTA : Dans le cas où la fonction intégrée n'est pas continue en un nombre fini de points de l'intervalle, on étudie la convergence des intégrales sur chacun des intervalles où la fonction est continue.

Méthode

Pour montrer la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert $]a, b[$:

- On choisit un réel c dans l'intervalle
- On montre la convergence sur $]a, c]$
- On montre la convergence sur $[c, b[$.

Voyons un premier exemple fondamental :

Proposition 5.9 – Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si

Démonstration. Commençons par le cas $\alpha = 1$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est donc $\ln$, et les deux intégrales divergent donc.

On suppose maintenant $\alpha \neq 1$. Notons qu'une primitive sur $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par

- On a donc, pour $x > 1$

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} =$$

On a alors deux cas :

- Si $\alpha > 1$, alors
- Si $\alpha \leq 1$, alors
- On a donc, pour $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} =$$

Cette quantité converge si , et diverge si

□

NOTA : On remarque donc que les intégrales de Riemann ne convergent *jamais* sur $\mathbb{R}_+$.

5.2.2 Propriétés

La positivité et la croissance de l'intégrale restent vraies, sous réserve de convergence :

Proposition 5.10

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. Alors

- si $f \geq 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ (Positivité)
- si $f \leq g$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (Croissance)
- si $f \geq 0$ sur $]a, b[$ et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$

La linéarité demande un peu plus d'attention :

Proposition 5.11

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. Alors l'intégrale $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$ converge, et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

NOTA : Attention, la réciproque est fausse : on peut toujours "rassembler" deux intégrales convergentes, mais on ne peut en général pas "séparer" une intégrale convergente.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction intégrée est continue en 2, donc l'intégrale y converge. On a alors, pour tout $x > 2$:

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{t^2-1} &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

En revanche,

Proposition 5.12

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $c \in [a, b[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

NOTA : On peut énoncer le même résultat pour des intégrales sur des intervalles semi-ouverts à gauche, ou ouverts.

5.2.3 Calculs d'intégrales

De la même façon que pour les intégrales sur des segments, on peut utiliser des changements de variables et des intégrations par parties.

Les résultats sont annoncés pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais les résultats s'adaptent sans difficulté aux autres intervalles.

Théorème 5.13 – Changement de variable

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature, et sont égales si elles convergent.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [\sqrt{2}, \infty[& \longrightarrow & [1, \infty[\\ u & \longmapsto & \sqrt{u^2-1} \end{array}$.

Alors les intégrales $\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}} du$ ont la même nature.

Étudions la deuxième; soit $x > \sqrt{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}} du &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ainsi, cette deuxième intégrale converge, vers , et donc la première aussi.

NOTA : Pour éviter d'avoir à écrire des intégrales qui ne convergent pas nécessairement, il peut être judicieux de se ramener à une intégrale sur un segment, puis de faire tendre les bornes.

Théorème 5.14 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ existe, alors les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

NOTA : Il est très fortement déconseillé d'utiliser ce théorème sur des intervalles qui ne sont pas des segments. On préférera toujours se ramener à un segment, puis faire tendre les bornes.

EXEMPLE : On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

En posant $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{1+t}$, qui définissent bien des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire l'intégration par parties, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt &= \\ &= \\ &= \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Il est à noter que l'on n'aurait pas pu faire l'intégration par parties directement sur $]0, 1]$, le crochet ne convergeant pas.

5.2.4 Critères de convergence

Dans les cas où on ne peut pas calculer directement la limite cherchée, on peut utiliser quelques critères de convergence.

Là encore, on énonce les résultats pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais on adaptera facilement aux autres types d'intervalle.

Le premier critère correspond aux intégrales faussement impropres.

Proposition 5.15

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si f est prolongeable par continuité en b , alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

EXEMPLE : L'intégrale $\int_a^b \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

Les autres critères concernent les fonctions positives.

Proposition 5.16 – Majoration d'une primitive

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et *positive*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $F : \begin{matrix} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t) dt \end{matrix}$ une primitive de f . Alors

- si F est majorée, alors
- sinon,

Théorème 5.17 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose qu'au voisinage de b , on a $f \leq g$. Alors si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors

De même que pour les séries, le théorème précédent s'adapte facilement pour des fonctions équivalentes.

Théorème 5.18 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

NOTA : Grâce à ce théorème, on peut étendre les comparaisons aux relations de négligeabilité. Plus précisément :

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $f(t) = o_{t \rightarrow b}(g(t))$, alors si $\int_a^b g(t) dt$ converge, $\int_a^b f(t) dt$ aussi.

En effet, il suffit de noter que si f est négligeable devant g , alors au voisinage de b , $f \leq g$, et on utilise à nouveau le théorème de comparaison.

Regardons un exemple d'application important :

Proposition 5.19 – Intégrale de Gauß

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge, et vaut

Démonstration. Commençons par étudier l'intégrale $\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

On note que pour tout $u > 0$, on a

et donc en posant $u = \frac{t^2}{2}$, on obtient

La fonction de droite est une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$, et donc notre intégrale $\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ est bien convergente.

Pour $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$, on peut se ramener au cas précédent avec le changement de variable

La valeur de l'intégrale est admise. □

Dans les cas où les fonctions ne sont pas positives, on peut essayer d'en prendre la valeur absolue.

Proposition-Définition 5.20

On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente* si

Alors

Démonstration. On se place par exemple sur $[a, b[$. Définissons les fonctions

$$f^+ : \begin{array}{cc} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \end{array} \quad \text{et} \quad f^- : \begin{array}{cc} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \end{array}$$

Les fonctions f^+ et f^- sont alors positives et continues sur $[a, b[$, et on a les relations

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

On a alors $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. Les intégrales $\int_a^b f^+(t) dt$ et $\int_a^b f^-(t) dt$ convergent donc, et par linéarité, $\int_a^b f(t) dt$ aussi. $\square$

NOTA : Attention, la réciproque est fausse. Les intégrales convergentes mais pas absolument convergentes sont qualifiées de *semi-convergentes*. Par exemple $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente.

5.3 Exercices

Exercice 1

En faisant successivement les changements de variables $x = t^2$, puis $t = \frac{1}{2}(\sin(u) + 1)$, calculer l'intégrale

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx.$$

Exercice 2

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer I .

3. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} dx$.

Exercice 3

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales suivantes convergent, et calculer leur valeur :

$$I = \int_0^{\pi} (x \cos(x) + \sin(x)) \ln(x) dx$$

$$J = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln(x)) dx.$$

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

1. Donner le tableau de variations de f .
2. On pose $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations et le signe de g .
3. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 5

On veut dans cet exercice étudier l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx.$$

1. Montrer que I est faussement impropre en 0 (on pourra utiliser un développement limité).
2. Soit $A > 0$.

- a) Montrer à l'aide d'un changement de variables que $\int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx = \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{u} du$.
- b) En déduire que

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx.$$

- c) Montrer que

$$\arctan(A) \ln(2) \leq \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx \leq \arctan(2A) \ln(2).$$

3. Montrer que l'intégrale I converge, et donner sa valeur.

Exercice 6

On considère les intégrales

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}.$$

1. Montrer que ces deux intégrales convergent.
2. Avec le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, montrer que $I = J$.
3. En déduire leur valeur.

Exercice 7 Fonction gamma d'Euler

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
b) En déduire que pour tout entier n , $\Gamma(n+1) = n!$.
3. a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
b) En faisant le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale précédente, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) En déduire que pour tout entier n ,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Exercice 8

On veut étudier la fonction *dilogarithme* définie par

$$\text{Li}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

1. On pose pour tout $t > 0, t \neq 1$

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t}.$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 1.

2. a) Montrer que la fonction Li est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) En notant que $|f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $t \rightarrow 0$, montrer que Li est définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que Li est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. On veut maintenant calculer $\text{Li}(0)$.

a) Montrer que

$$\text{Li}(0) = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

On pourra faire le changement de variable $x = -\ln(t)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty x e^{-kx} dx$ converge, et calculer sa valeur.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty x e^{-kx} dx.$$

i. Justifier que $S_n = \int_0^\infty x \frac{1-e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.

ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \text{Li}(0) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

d) En déduire que $\text{Li}(0) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

5. Étudier la limite de la fonction Li en $+\infty$.

6. Donner le tableau de variations complet de la fonction Li , et tracer sa courbe représentative.

