

5 Intégration sur un intervalle quelconque

5.1 Intégration sur un segment

Commençons par rappeler la définition d'une intégrale sur un segment.

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On appelle *intégrale de f entre a et b* l'aire algébrique comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses, dans un repère orthonormé.

On note ce réel $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t) dt$, la variable t étant muette.

Théorème 5.2 – Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors les suites

$$\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right)_n$$

convergent toutes les deux, vers $\int_a^b f(t) dt$.

NOTA : On utilise en général ce théorème pour calculer des sommes, en prenant $a = 0$ et $b = 1$.
On a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt.$$

En pratique, on utilise souvent le théorème suivant :

Théorème 5.3 – fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est la primitive de f qui s'annule en a .

En particulier, pour tous $a < b \in I$ et toute primitive F de f sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = F(a) - F(b).$$

Résumons les propriétés de l'intégrale, avec des notations évidentes :

Proposition 5.4

L'intégrale sur un segment vérifie les propriétés suivantes :

- Linéarité :

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

- Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

- Inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- Positivité :

$$\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

- Croissance :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

- Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction positive :

$$f \text{ positive et } \int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0.$$

On a alors deux résultats pour nous aider à calculer des intégrales :

Théorème 5.5 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Théorème 5.6 – Changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt.$$

5.2 Intégration sur un intervalle quelconque

5.2.1 Définitions

On veut maintenant pouvoir, dans certains cas, étendre la définition d'intégrale à des fonctions définies sur des intervalles quelconques (ouverts, fermés ou semi-ouverts).

Définition 5.7

Soit $I = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ est *convergente* si la fonction $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ admet une limite finie en b .

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \, dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale est *divergente*.

On définit de la même façon la convergence d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert à gauche.

Définition 5.8

Soit $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ non vide. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ est *convergente* si, pour un $c \in I$, les deux intégrales $\int_a^c f(t) \, dt$ et $\int_c^b f(t) \, dt$ convergent.

NOTA : Dans le cas où la fonction intégrée n'est pas continue en un nombre fini de points de l'intervalle, on étudie la convergence des intégrales sur chacun des intervalles où la fonction est continue.

Méthode

Pour montrer la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert $]a, b[$:

- On choisit un réel c dans l'intervalle
- On montre la convergence sur $]a, c[$

- On montre la convergence sur $[c, b[$.

Voyons un premier exemple fondamental :

Proposition 5.9 – Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Commençons par le cas $\alpha = 1$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est donc \ln , et les deux intégrales divergent donc.

On suppose maintenant $\alpha \neq 1$. Notons qu'une primitive sur $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur \mathbb{R}_+^* est donnée par $t \mapsto \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$.

- On a donc, pour $x > 1$

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right).$$

On a alors deux cas :

- Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, et l'intégrale converge.
 - Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$, et l'intégrale diverge.
- On a donc, pour $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right).$$

Cette quantité converge si $\alpha < 1$, et diverge si $\alpha \geq 1$.

□

NOTA : On remarque donc que les intégrales de Riemann ne convergent *jamais* sur \mathbb{R}_+ .

5.2.2 Propriétés

La positivité et la croissance de l'intégrale restent vraies, sous réserve de convergence :

Proposition 5.10

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. Alors

- si $f \geq 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ (Positivité)
- si $f \leq g$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (Croissance)
- si $f \geq 0$ sur $]a, b[$ et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$

La linéarité demande un peu plus d'attention :

Proposition 5.11

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. Alors l'intégrale $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$ converge, et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

NOTA : Attention, la réciproque est fautive : on peut toujours "rassembler" deux intégrales convergentes, mais on ne peut en général pas "séparer" une intégrale convergente.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction intégrée est continue en 2, donc l'intégrale y converge. On a alors, pour tout $x > 2$:

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{t^2-1} &= \int_2^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_2^x \frac{dt}{t-1} - \int_2^x \frac{dt}{t+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln(3)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \ln(3) \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

En revanche, les intégrales $\int_2^\infty \frac{dt}{t-1}$ et $\int_2^\infty \frac{dt}{t+1}$ divergent.

Proposition 5.12

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

NOTA : On peut énoncer le même résultat pour des intégrales sur des intervalles semi-ouverts à gauche, ou ouverts.

5.2.3 Calculs d'intégrales

De la même façon que pour les intégrales sur des segments, on peut utiliser des changements de variables et des intégrations par parties.

Les résultats sont annoncés pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais les résultats s'adaptent sans difficulté aux autres intervalles.

Théorème 5.13 – Changement de variable

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$ de classe \mathcal{C}^1 , strictement monotone.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature, et sont égales si elles convergent.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{l} [\sqrt{2}, \infty[\longrightarrow [1, \infty[\\ u \longmapsto \sqrt{u^2-1} \end{array}$.

Alors les intégrales $\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-1}u} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}} du$ ont la même nature.

Étudions la deuxième; soit $x > \sqrt{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{\sqrt{u^2-1}u} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}} du &= \int_{\sqrt{2}}^x \frac{du}{u^2-1} \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Ainsi, cette deuxième intégrale converge, vers $\ln(\sqrt{2}+1)$, et donc la première aussi.

NOTA : Pour éviter d'avoir à écrire des intégrales qui ne convergent pas nécessairement, il peut être judicieux de se ramener à une intégrale sur un segment, puis de faire tendre les bornes.

Théorème 5.14 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ existe, alors les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

NOTA : Il est très fortement déconseillé d'utiliser ce théorème sur des intervalles qui ne sont pas des segments. On préférera toujours se ramener à un segment, puis faire tendre les bornes.

EXEMPLE : On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$. On pourra montrer plus tard que cette intégrale converge.

En posant $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{1+t}$, qui définissent bien des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , on peut faire l'intégration par parties, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t} \right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \frac{\ln(x)}{1+x} + \left[\ln \left(\frac{t}{t+1} \right) \right]_x^1 \\ &= \frac{\ln(x)}{1+x} - \ln(2) - \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \\ &= -\ln(2) + \ln(x)(1-x) + \underset{x \rightarrow 0}{o(x)} - \ln(x) + x + \underset{x \rightarrow 0}{o(x)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\ln(2) \end{aligned}$$

Il est à noter que l'on n'aurait pas pu faire l'intégration par parties directement sur $]0, 1[$, le crochet ne convergeant pas.

5.2.4 Critères de convergence

Dans les cas où on ne peut pas calculer directement la limite cherchée, on peut utiliser quelques critères de convergence.

Là encore, on énonce les résultats pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais on adaptera facilement aux autres types d'intervalle.

Le premier critère correspond aux intégrales faussement impropres.

Proposition 5.15

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si f est prolongeable par continuité en b^* , alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

EXEMPLE : L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Les autres critères concernent les fonctions positives.

Proposition 5.16 – Majoration d'une primitive

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et *positive*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $F : \begin{matrix} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t) dt \end{matrix}$ une primitive de f . Alors

- si F est majorée, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge
- sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème 5.17 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose qu'au voisinage de b , on a $f \leq g$. Alors si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ aussi.

De même que pour les séries, le théorème précédent s'adapte facilement pour des fonctions équivalentes.

Théorème 5.18 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

NOTA : Grâce à ce théorème, on peut étendre les comparaisons aux relations de négligeabilité. Plus précisément :

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $f(t) = o_{t \rightarrow b}(g(t))$, alors si $\int_a^b g(t) dt$ converge, $\int_a^b f(t) dt$ aussi.

*. de façon équivalente, f admet une limite finie en b

En effet, il suffit de noter que si f est négligeable devant g , alors au voisinage de b , $f \leq g$, et on utilise à nouveau le théorème de comparaison.

Regardons un exemple d'application important :

Proposition 5.19 – Intégrale de Gauß

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge, et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Démonstration. Commençons par étudier l'intégrale $\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

On note que pour tout $u > 0$, on a

$$0 \leq u \leq e^u,$$

et donc en posant $u = \frac{t^2}{2}$, on obtient

$$0 \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{2}{t^2}.$$

La fonction de droite est une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$, et donc notre intégrale $\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ est bien convergente.

Pour $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$, on peut se ramener au cas précédent avec le changement de variable $\varphi(u) = -u$.

La valeur de l'intégrale est admise. \square

Dans les cas où les fonctions ne sont pas positives, on peut essayer d'en prendre la valeur absolue.

Proposition-Définition 5.20

On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente* si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Alors toute intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration. On se place par exemple sur $[a, b[$. Définissons les fonctions

$$f^+ : \begin{array}{l} [a, b[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad f^- : \begin{array}{l} [a, b[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} -f(t) & \text{si } f(t) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Les fonctions f^+ et f^- sont alors positives et continues sur $[a, b[$, et on a les relations

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

On a alors $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. Les intégrales $\int_a^b f^+(t) dt$ et $\int_a^b f^-(t) dt$ convergent donc, et par linéarité, $\int_a^b f(t) dt$ aussi. \square

NOTE : Attention, la réciproque est fautive. Les intégrales convergentes mais pas absolument convergentes sont qualifiées de *semi-convergentes*. Par exemple $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

5.3 Exercices

Exercice 1

En faisant successivement les changements de variables $x = t^2$, puis $t = \frac{1}{2}(\sin(u) + 1)$, calculer l'intégrale

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx.$$

Réponse de l'exercice

On fait le changement de variable $x = t^2$: il est valable car la fonction carrée est bien de classe \mathcal{C}^1 . On a alors $dx = 2t dt$, et donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} 2t dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t(1-t)} dt \end{aligned}$$

De même, le second changement de variables est valide, et donne $dt = \frac{1}{2} \cos(u) du$. On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \sin(u))(\sin(u) + 1)} \frac{1}{2} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)} \frac{1}{2} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (\cos(2u) + 1) du \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin(2u) + u \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 2

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer I .
3. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} dx$.

Réponse de l'exercice

1. On commence par noter que si $x \in]-\pi, \pi[$, alors $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et donc les tangentes sont bien définies. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

2. On a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx.$$

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et donc $dt = \frac{1}{2} (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) dx$. Par changement de variables, on a donc

$$I = 2 \int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt = 2 \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = 1.$$

Exercice 3

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales suivantes convergent, et calculer leur valeur :

$$I = \int_0^{\pi} (x \cos(x) + \sin(x)) \ln(x) dx$$

$$J = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln(x)) dx.$$

Réponse de l'exercice

Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$.

- On note $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\pi (x \cos(x) + \sin(x)) \ln(x) dx$.

Pour l'intégrale I : on pose les fonctions $u : \begin{matrix} [\varepsilon, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \sin(x) \end{matrix}$ et $v : \begin{matrix} [\varepsilon, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{matrix}$. Ces fonctions sont bien de classe \mathcal{C}^1 , et par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^\pi u'(x)v(x) dx \\ &= [u(x)v(x)]_\varepsilon^\pi - \int_\varepsilon^\pi u(x)v'(x) dx \\ &= -\varepsilon \sin(\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\pi \sin(x) dx \\ &= -\varepsilon \sin(\varepsilon) \ln(\varepsilon) - 1 - \cos(\varepsilon) \end{aligned}$$

- Pour l'intégrale J : on pose les fonctions $u : \begin{matrix} [\varepsilon, e^{\frac{\pi}{2}}] \\ x \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \begin{matrix} [\varepsilon, e^{\frac{\pi}{2}}] \\ x \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}$. Les fonctions sont bien de classe \mathcal{C}^1 , et par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} u'(x)v(x) \, dx \\ &= [u(x)v(x)]_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} u(x)v'(x) \, dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon \sin(\ln(\varepsilon)) - \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln(x)) \, dx \end{aligned}$$

Refaisons une intégration par parties dans cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln(x)) \, dx &= [x \cos(\ln(x))]_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln(x)) \, dx \\ &= -\varepsilon(\cos(\ln(\varepsilon))) + J \end{aligned}$$

On a donc $2J_\varepsilon = e^{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon \sin(\ln(\varepsilon)) + \varepsilon(\cos(\ln(\varepsilon)))$, et on en déduit J_ε .

Ainsi, I et J convergent, et $I = -2$ et $J = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 4

Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt.$$

1. Donner le tableau de variations de f .
2. On pose $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations et le signe de g .
3. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Réponse de l'exercice

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , et sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

La dérivée est donc strictement positive, et la fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

2. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

La fonction g' est donc positive sur \mathbb{R}_+^* , et la fonction g est donc croissante sur \mathbb{R}_+^* .

On a $g(1) = 0$, et la fonction g est donc négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, \infty[$.

3. On a donc pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) \leq \ln(x)$.

Par comparaison de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Pour tout $x > 1$, on a aussi $f(x) \geq \ln(x)$, et donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Exercice 5

On veut dans cette exercice étudier l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx.$$

1. Montrer que I est faussement impropre en 0 (on pourra utiliser un développement limité).

2. Soit $A > 0$.

a) Montrer à l'aide d'un changement de variables que $\int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx = \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{u} du$.

b) En déduire que

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx.$$

c) Montrer que

$$\arctan(A) \ln(2) \leq \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx \leq \arctan(2A) \ln(2).$$

3. Montrer que l'intégrale I converge, et donner sa valeur.

Réponse de l'exercice

1. On note qu'au voisinage de 0

$$\arctan(2x) - \arctan(x) = x + o(x),$$

et donc la fonction intégrée se prolonge par continuité en 0. L'intégrale converge donc en 0.

2. a) Posons $\varphi(x) = 2x$; la fonction φ est strictement monotone, de classe \mathcal{C}^1 , et on peut donc faire le changement de variable $u = 2x$:

$$\int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx = \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{\frac{u}{2}} \frac{1}{2} du = \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{u} du.$$

b) On a

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx &= \int_0^A \frac{\arctan 2x}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad \text{par linéarité} \\ &= \int_0^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad \text{par la question précédente} \\ &= \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad \text{par la relation de Chasles} \end{aligned}$$

c) Par croissance de la fonction arctan et croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_A^{2A} \frac{\arctan(A)}{x} dx \leq \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan(2A)}{x} dx,$$

et on retrouve le résultat annoncé en calculant les intégrales de gauche et de droite.

3. Ainsi, par théorème d'encadrement des limites, l'intégrale I converge, vers $\frac{\ln(2)\pi}{2}$.

Exercice 6

On considère les intégrales

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}.$$

1. Montrer que ces deux intégrales convergent.
2. Avec le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, montrer que $I = J$.
3. En déduire leur valeur.

Réponse de l'exercice

1. Les deux fonctions intégrées sont continues en 0. En $+\infty$, on a

$$\frac{1}{(1+u^2)(1+u^n)} \leq \frac{1}{u^2}.$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, I converge.

Pour J , on a

$$\frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} \leq \frac{u^n}{u^{n+2}} = \frac{1}{u^2},$$

et donc pour les mêmes raisons, J converge.

2. Le changement de variable de de classe C^1 et strictement décroissant. On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_\infty^0 \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 \left(1+\frac{1}{t}\right)^n} \\ &= J \end{aligned}$$

3. On a alors

$$I + J = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 Fonction gamma d'Euler

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
b) En déduire que pour tout entier n , $\Gamma(n+1) = n!$.
3. a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
b) En faisant le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale précédente, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
c) En déduire que pour tout entier n ,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Réponse de l'exercice

1. Soit $x > 0$. On a, au voisinage de 0

$$t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Or l'intégrale de $\frac{1}{t^{1-x}}$ est convergente au voisinage de 0, et donc par comparaison de fonctions positives, l'intégrale définissant Γ converge au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2},$$

la limite du quotient tendant vers 0. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale définissant Γ converge au voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ étant continue sur \mathbb{R}_+^* , son intégrale converge entre 0 et $+\infty$.

2. a) Soit $x > 0$. Soient $\alpha, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soient les fonctions

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^x \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -e^{-t} \end{array}.$$

Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\omega t^x e^{-t} dt &= \int_\alpha^\omega u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_\alpha^\omega + \int_\alpha^\omega u'(t)v(t) dt \\ &= \alpha^x e^{-\alpha} - \omega^x e^{-\omega} + \int_\alpha^\omega x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{\omega \rightarrow \infty} x\Gamma(x) \end{aligned}$$

- b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n la propriété " $\Gamma(n+1) = n!$ ".

- On a bien $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$, d'où P_0 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n . On a alors

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2) &= \Gamma(n+1+1) \\ &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ &= (n+1)n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

3. a) On reconnaît la moitié de l'intégrale de Gauß, et donc

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- b) La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est bien strictement monotone et de classe \mathcal{C}^1 , donc le changement de variable proposé est licite. On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{u}} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

- c) Par récurrence, l'initialisation étant montrée à la question précédente :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)} \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!} \\ &= \frac{(2n+2)! \sqrt{\pi}}{4^{n+1} (n+1)!} \end{aligned}$$

Exercice 8

On veut étudier la fonction *dilogarithme* définie par

$$\text{Li}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

1. On pose pour tout $t > 0$, $t \neq 1$

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t}.$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 1.

2. a) Montrer que la fonction Li est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 b) En notant que $|f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, montrer que Li est définie sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que Li est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et continue sur \mathbb{R}_+ .
4. On veut maintenant calculer $\text{Li}(0)$.

a) Montrer que

$$\text{Li}(0) = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

On pourra faire le changement de variable $x = -\ln(t)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} x e^{-kx} dx$ converge, et calculer sa valeur.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} x e^{-kx} dx.$$

i. Justifier que $S_n = \int_0^{\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.

ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \text{Li}(0) - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

d) En déduire que $\text{Li}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

5. Étudier la limite de la fonction Li en $+\infty$.

6. Donner le tableau de variations complet de la fonction Li, et tracer sa courbe représentative.

Réponse de l'exercice

1. On a au voisinage de 1 $\ln(t) \sim t - 1$, et donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} -1$.

2. a) La fonction f est donc continue sur \mathbb{R}_+^* , et la fonction Li aussi.

b) Par croissances comparées, on a bien la relation proposée.

Ainsi, à partir d'un certain rang, on a $|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, et par comparaison de fonctions positives, Li est bien définie au voisinage de 0.

3. Par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f étant continue sur \mathbb{R}_+^* , la fonction Li est bien dérivable sur cet ensemble.

Elle est donc continue sur \mathbb{R}_+^* , et elle l'est en 0 d'après la question 2b.

4. a) Le changement de variable proposé est bien licite, car strictement décroissant et de classe \mathcal{C}^1 . On a alors

$$\begin{aligned} \text{Li}(0) &= \int_1^0 \frac{\ln(t)}{1-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-x}{1-e^{-x}} (-e^{-x} dx) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

b) Soit $\omega > 0$. On a alors, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\omega x e^{-kx} dx &= \left[-\frac{1}{k} x e^{-kx} \right]_0^\omega + \frac{1}{k} \int_0^\omega e^{-kx} dx \\ &= -\frac{1}{k} \omega e^{-k\omega} - \frac{1}{k^2} (e^{-k\omega} - 1) \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

c) i. Chaque intégrale convergente, on a par linéarité de l'intégrale

$$S_n = \int_0^\infty x \left(\sum_{k=1}^n e^{-kx} \right) dx.$$

En calculant la somme géométrique, on retrouve le résultat voulu.

ii. On sait que $e^x \geq 1 + x$, et l'inégalité est immédiate.

iii. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par linéarité et croissance de l'intégrale

$$\text{Li}(0) - S_n = \int_0^\infty \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{1}{n}.$$

d) Par théorème d'encadrement des limites, la suite $(\text{Li}(0) - S_n)$ converge vers 0, et donc

$$\text{Li}(0) \rightarrow \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

5. On a pour tout $t > 1$

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \geq \frac{1}{t-1} \geq \frac{1}{t}.$$

Or l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ diverge vers $+\infty$, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^\infty \frac{\ln(t) dt}{t-1}$ aussi. Finalement, $\text{Li}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$.

6. La dérivée de la fonction Li est f , qui est toujours négative. La fonction Li est donc décroissante. On a donc le tableau de variations et la courbe

x	0	1	$+\infty$
f		-	
Li	$\frac{\pi^2}{6}$	0	$-\infty$



