5 Intégration sur un intervalle quelconque

5.1 Intégration sur un segment

Commençons par rappeler la définition d'une intégrale sur un segment.

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On appelle *intégrale de f entre a et b* l'aire algébrique comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses, dans un repère orthonormé.

On note ce réel $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t étant muette.

Théorème 5.2 – Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors les suites

$$\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)_n$$

convergent toutes les deux, vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Nota : On utilise en général ce théorème pour calculer des sommes, en prenant $a=0$ et $b=1$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En pratique, on utilise souvent le théorème suivant :

Théorème 5.3 – fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est la primitive de f qui s'annule en a.

En particulier, pour tous $a < b \in I$ et toute primitive F de f sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b).$$

Résumons les propriétés de l'intégrale, avec des notations évidentes :

Proposition 5.4

L'intégrale sur un segment vérifie les propriétés suivantes :

- Linéarité :
$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Relation de Chasles :
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Inégalité triangulaire :
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
- Positivité :
$$\forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
- Croissance :
$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction positive :
$$f \text{ positive} \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \ \Rightarrow\ f = 0.$$

On a alors deux résultats pour nous aider à calculer des intégrales :

Théorème 5.5 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 5.6 – Changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.2 Intégration sur un intervalle quelconque

5.2.1 Définitions

On veut maintenant pouvoir, dans certains cas, étendre la définition d'intégrale à des fonctions définies sur des intervalles quelconques (ouverts, fermés ou semi-ouverts).

Définition 5.7

Soit $I = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* si la fonction $x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b.

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sinon, on dit que l'intégrale est divergente.

On définit de la même façon la convergence d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert à gauche.

Définition 5.8

Soit $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, pour un $c \in I$, les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

NOTA : Dans le cas où la fonction intégrée n'est pas continue en un nombre fini de points de l'intervalle, on étudie la convergence des intégrales sur chacun des intervalles où la fonction est continue.

Méthode

Pour montrer la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert $]a, b[$:

- On choisit un réel c dans l'intervalle
- On montre la convergence sur $]a, c]$

- On montre la convergence sur $[c, b[$.

Voyons un premier exemple fondamental :

Proposition 5.9 – Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Commençons par le cas $\alpha = 1$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est donc ln, et les deux intégrales divergent donc.

On suppose maintenant $\alpha \neq 1$. Notons qu'une primitive sur $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par $t \mapsto \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}$.

- On a donc, pour $x > 1$
$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right).$$
On a alors deux cas :
  - Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, et l'intégrale converge.
  - Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, et l'intégrale diverge.
- On a donc, pour $x \in]0, 1[$:
$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$
Cette quantité converge si $\alpha < 1$, et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

□

NOTA : On remarque donc que les intégrales de Riemann ne convergent *jamais* sur $\mathbb{R}_+$.

5.2.2 Propriétés

La positivité et la croissance de l'intégrale restent vraies, sous réserve de convergence :

Proposition 5.10

Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors

- si $f \geqslant 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (Positivité)
- si $f \leqslant g$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (Croissance)
- si $f \geqslant 0$ sur $]a, b[$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$

La linéarité demande un peu plus d'attention :

Proposition 5.11

Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors l'intégrale $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

NOTA : Attention, la réciproque est fausse : on peut toujours "rassembler" deux intégrales convergentes, mais on ne peut en général pas "séparer" une intégrale convergente.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$. La fonction intégrée est continue en 2, donc l'intégrale y converge. On a alors, pour tout $x > 2$:

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \int_2^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln(3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(3)\right) \\
&\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\ln(3)}{2}
\end{aligned}$$

En revanche, les intégrales $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ et $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ divergent.

Proposition 5.12

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $c \in [a, b[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

NOTA : On peut énoncer le même résultat pour des intégrales sur des intervalles semi-ouverts à gauche, ou ouverts.

5.2.3 Calculs d'intégrales

De la même façon que pour les intégrales sur des segments, on peut utiliser des changements de variables et des intégrations par parties.

Les résultats sont annoncés pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais les résultats s'adaptent sans difficulté aux autres intervalles.

Théorème 5.13 – Changement de variable

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et sont égales si elles convergent.

EXEMPLE : Étudions l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+1}}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [\sqrt{2}, \infty[& \longrightarrow & [1, \infty[\\ u & \longmapsto & \sqrt{u^2-1} \end{array}$.

Alors les intégrales $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+1}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{u^2-1}u} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ ont la même nature.

Étudions la deuxième ; soit $x > \sqrt{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{\sqrt{u^2-1}u} \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u &= \int_{\sqrt{2}}^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^x \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

Ainsi, cette deuxième intégrale converge, vers $\ln(\sqrt{2}+1)$, et donc la première aussi.

NOTA : Pour éviter d'avoir à écrire des intégrales qui ne convergent pas nécessairement, il peut être judicieux de se ramener à une intégrale sur un segment, puis de faire tendre les bornes.

Théorème 5.14 – Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x \to b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ existe, alors les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

NOTA : Il est très fortement déconseillé d'utiliser ce théorème sur des intervalles qui ne sont pas des segments. On préfèrera toujours se ramener à un segment, puis faire tendre les bornes.

EXEMPLE : On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. On pourra montrer plus tard que cette intégrale converge.

En posant $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{1+t}$, qui définissent bien des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire l'intégration par parties, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x} + \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_x^1 \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x} - \ln(2) - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\
&= -\ln(2) + \ln(x)(1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x)) - \ln(x) + x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} -\ln(2)
\end{aligned}$$

Il est à noter que l'on n'aurait pas pu faire l'intégration par parties directement sur $]0, 1]$, le crochet ne convergeant pas.

5.2.4 Critères de convergence

Dans les cas où on ne peut pas calculer directement la limite cherchée, on peut utiliser quelques critères de convergence.

Là encore, on énonce les résultats pour des intervalles semi-ouverts à droite, mais on adaptera facilement aux autres types d'intervalle.

Le premier critère correspond aux intégrales faussement impropres.

Proposition 5.15

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si f est prolongeable par continuité en b*, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

EXEMPLE : L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Les autres critères concernent les fonctions positives.

Proposition 5.16 – Majoration d'une primitive

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue et *positive*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $F : \begin{array}{ccc} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ une primitive de f. Alors

- si F est majorée, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
- sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème 5.17 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose qu'au voisinage de b, on a $f \leqslant g$. Alors si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi.

De même que pour les séries, le théorème précédent s'adapte facilement pour des fonctions équivalentes.

Théorème 5.18 – de comparaison

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(b)$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

NOTA : Grâce à ce théorème, on peut étendre les comparaisons aux relations de négligeabilité. Plus précisément :

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et *positives*, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $f(t) \underset{t \to b}{=} \mathrm{o}(g(t))$, alors si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi.

---

*. de façon équivalente, f admet une limite finie en b

En effet, il suffit de noter que si f est négligeable devant g, alors au voisinage de b, $f \leqslant g$, et on utilise à nouveau le théorème de comparaison.

Regardons un exemple d'application important :

Proposition 5.19 – Intégrale de Gauß

L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ converge, et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Démonstration. Commençons par étudier l'intégrale $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$.

On note que pour tout $u > 0$, on a

$$0 \leqslant u \leqslant e^u,$$

et donc en posant $u = \frac{t^2}{2}$, on obtient

$$0 \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

La fonction de droite est une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$, et donc notre intégrale $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ est bien convergente.

Pour $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$, on peut se ramener au cas précédent avec le changement de variable $\varphi(u) = -u$.

La valeur de l'intégrale est admise. □

Dans les cas où les fonctions ne sont pas positives, on peut essayer d'en prendre la valeur absolue.

Proposition-Définition 5.20

On dit qu'un intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Alors toute intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration. On se place par exemple sur $[a, b[$. Définissons les fonctions

$$f^+ : \begin{array}{ccc} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad f^- : \begin{array}{ccc} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -f(t) & \text{si } f(t) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Les fonctions f^+ et f^- sont alors positives et continues sur $[a, b[$, et on a les relations

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

On a alors $f^+ \leqslant |f|$ et $f^- \leqslant |f|$. Les intégrales $\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$ convergent donc, et par linéarité, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. $\square$

NOTA : Attention, la réciproque est fausse. Les intégrales convergentes mais pas absolument convergentes sont qualifiées de *semi-convergentes*. Par exemple $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

5.3 Exercices

Exercice 1

En faisant successivement les changements de variables $x = t^2$, puis $t = \frac{1}{2}(\sin(u) + 1)$, calculer l'intégrale

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$$

Réponse de l'exercice

On fait le changement de variable $x = t^2$: il est valable car la fonction carrée est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, et donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{t}} 2t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4t(1-t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De même, le second changement de variables est valide, et donne $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u$. On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin(u))(\sin(u)+1)}\frac{1}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)}\frac{1}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\left(\cos(2u)+1\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin(2u)+u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 2

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Avec le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, calculer I.

3. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

Réponse de l'exercice

1. On commence par noter que si $x \in]-\pi, \pi[$, alors $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc les tangentes sont bien définies. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

2. On a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x$. Par changement de variables, on a donc

$$I = 2\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = 1.$$

Exercice 3

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales suivantes convergent, et calculer leur valeur :

$$I = \int_0^{\pi} (x\cos(x)+\sin(x))\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$$

Réponse de l'exercice

Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$.

- On note $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\pi (x\cos(x)+\sin(x))\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

  Pour l'intégrale I : on pose les fonctions $u : \begin{array}{ccc} [\varepsilon,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(x)\end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} [\varepsilon,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)\end{array}$. Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^\pi u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_\varepsilon^\pi - \int_\varepsilon^\pi u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\varepsilon\sin(\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\varepsilon\sin(\varepsilon)\ln(\varepsilon) - 1 - \cos(\varepsilon)\end{aligned}$$

- Pour l'intégrale J : on pose les fonctions $u : \begin{array}{ccc} \left[\varepsilon, e^{\frac{\pi}{2}}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} \left[\varepsilon, e^{\frac{\pi}{2}}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\ln(x)) \end{array}$. Les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon\sin(\ln(\varepsilon)) - \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Refaisons une intégration par parties dans cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x &= [x\cos(\ln(x))]_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_\varepsilon^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\varepsilon(\cos(\ln(\varepsilon))) + J \end{aligned}$$

On a donc $2J_\varepsilon = e^{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon\sin(\ln(\varepsilon)) + \varepsilon(\cos(\ln(\varepsilon)))$, et on en déduit $J\varepsilon$.

Ainsi, I et J convergent, et $I = -2$ et $J = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 4 Fonction gamma d'Euler

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire que pour tout entier n, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
   b) En faisant le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale précédente, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
   c) En déduire que pour tout entier n,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Réponse de l'exercice

1. Soit $x > 0$. On a, au voisinage de 0

$$t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Or l'intégrale de $\frac{1}{t^{1-x}}$ est convergente au voisinage de 0, et donc par comparaison de fonctions positives, l'intégrale définissant Γ converge au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2},$$

la limite du quotient tendant vers 0. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale définissant Γ converge au voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, son intégrale converge entre 0 et $+\infty$.

2. a) Soit $x > 0$. Soient $\alpha, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soient les fonctions

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^x \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -e^{-t} \end{array} .$$

Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\omega t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\omega u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_\alpha^\omega + \int_\alpha^\omega u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha^x e^{-\alpha} - \omega^x e^{-\omega} + \int_\alpha^\omega x t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d} \\ &\underset{\substack{\omega\to\infty \\ \alpha\to 0}}{\longrightarrow} x\Gamma(x) \end{aligned}$$

b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n la propriété "$\Gamma(n+1) = n!$".

- On a bien $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0!$, d'où P_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n. On a alors

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2) &= \Gamma(n+1+1) \\ &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ &= (n+1)n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

3. a) On reconnaît la moitié de l'intégrale de Gauß, et donc

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

b) La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est bien strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, donc le changement de variable proposé est licite. On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-u}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

c) Par récurrence, l'initialisation étant montrée à la question précédente :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+frac12\right) \\ &= \frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \\ &= \frac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{4^{n+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, telle qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-s_0 t}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que pour tout $s > s_0$, $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On pourra faire une intégration par parties.

Réponse de l'exercice

1. F est donc continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'hypothèse de convergence de l'intégrale prouve que F admet une limite finie en $+\infty$. Elle est donc bornée.
2. Soit $X > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_0^X f(t)e^{-s_0 t}e^{(s_0-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= F(X)e^{(s_0-s)X} + (s-s_0) - F(0) + (s-s_0)\int_0^X F(t)e^{(s_0-s)t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Comme F est bornée, on a donc un $M > 0$ tel que $|F(t)|e^{(s_0-s)t} \leqslant Me^{(s_0-s)t}$, cette dernière fonction étant intégrable, et donc la dernière intégrale converge. De plus, $F(X)$ admet une limite quand $X \to \infty$, et donc on a bien la convergence de l'intégrale voulue.

Exercice 6

Le but est de montrer

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

1. Montrer que la fonction $t \in]0,1[\mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est prolongeable par continuité en 1.
2. Montrer alors que l'intégrale converge.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et la calculer.

4. Montrer alors que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que la fonction $t \in]0,1[\mapsto \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1, puis que cette fonction est bornée sur $]0,1[$.

6. En déduire l'égalité demandée.

Réponse de l'exercice

1. On a au voisinage de 1 : $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \sim \frac{t-1}{t^2-1} \to \frac{1}{2}$.

2. En 0, on a $\frac{\ln(t)}{1-t^2} \sim -\ln(t)$. Ce sont deux fonctions positives, et l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1).

   Ainsi, par théorème de comparaison, l'intégrale proposée converge bien.

3. On a déjà vu que I_0 convergeait, et pour $k \geqslant 1$, on peut prolonger la fonction par continuité sur le segment $[0,1]$.

   Par intégration par parties, on obtient $I_k = \frac{-1}{(k+1)^2}$.

4. On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{2n} I_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \ln(t) \sum_{k=0}^{n} t^k\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   et on retrouve le résultat voulu en reconnaissant une somme géométrique.

5. La fonction tend vers 0 en 0 par croissance comparée, et vers $\frac{1}{2}$ en 1 d'après la question 1.

   Elle (quitte à la prolonger) est donc continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée.

6. Notons M la borne.

   On a alors
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 t^{2n} M\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M}{2n+1}\end{aligned}$$

   Ainsi, la limite quand n tend vers l'infini et nulle, et on retrouve l'égalité demandée en passant à la limite dans l'égalité de la question 4.

Exercice 7

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge. On pourra utiliser le changement de variable $u = t^2$, et une intégration par parties.

Réponse de l'exercice

Faisons le changement de variable proposé. On a alors

$$\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}},$$

les deux intégrales ayant même nature. Étudions la seconde.

Elle est faussement impropre en 0.

Soit $X > 0$. On a alors par intégration par parties

$$\int_1^X \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cos(1) - \frac{1}{2\sqrt{X}}\cos(X) - \int_1^X \frac{\cos(u)}{4u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

On a alors

$$\left|\frac{\cos(u)}{4u\sqrt{u}}\right| \leqslant \frac{1}{4u^{\frac{3}{2}}},$$

où la seconde intégrale converge bien (c'est une intégrale de Riemann convergente).

Par comparaison, l'intégrale converge bien, et on a bien la convergence voulue.

Exercice 8

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note (sous réserve de convergence)

$$F(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est une fonction paire.
3. a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a-b|$.
   b) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|F(x) - F(y)| \leqslant |x^2 - y^2|$.
   c) En déduire que F est continue.

Réponse de l'exercice

1. La fonction intégrée est bien continue en 1, et est inférieure à $\frac{1}{t^3}$ au voisinage de $+\infty$, dont l'intégrale converge.
2. C'est trivial.
3. a) La fonction $g : t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que
   $$|e^{-a} - e^{-b}| = |g'(c)||a-b| \leqslant |a-b|.$$

b) On a donc pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_1^{\infty} \frac{e^{-tx^2} - e^{-ty^2}}{1+t^3} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant |x^2 - y^2| \int_1^{\infty} \frac{t}{1+t^3} \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant |x^2 - y^2| \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&\leqslant |x^2 - y^2|
\end{aligned}$$

c) La fonction est donc bien continue.

Exercice 9

Pour tout $x \in I = \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étude générale de F.
   a) Justifier que F est dérivable sur I, puis donner sa dérivée, son tableau de variations et son signe.
   b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire une fonction Python prenant en paramètre un réel x et qui renvoie une valeur approchée de $F(x)$
   c) Écrire un script Python qui trace la courbe de F sur $]0; 10]$.
   d) En déduire une conjecture sur les limites de F en 0 et $+\infty$.
2. Étude de F au voisinage de $+\infty$.
   a) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x - 1 \leqslant F(x) \leqslant e(x-1)$.
   b) En déduire la limite de F en $+\infty$ et montrer que $\frac{F(x)}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.
   c) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties la fonction R telle que

   $$\forall x \in I,\ F(x) = xe^{\frac{1}{x}} - e + R(x).$$

   On laissera $R(x)$ sous forme d'une intégrale.
   d) Montrer que $R(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{o}(x)$.
   e) En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Étude de F au voisinage de 0.
   a) Par changement de variable, montrer que pour tout $x \in I$,

   $$F(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

   b) Montrer que $\exists a \geqslant 1,\ \forall u \geqslant a,\ \frac{e^u}{u^2} \geqslant 1$.
   c) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $F(x) \leqslant a - \frac{1}{x}$.
   d) En déduire la limite de F en 0.

4. Étude de la suite définie sur $[\![2, +\infty[\![$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{k}{n}}}{k(k+1)}.$$

a) Écrire une fonction Python qui prend en paramètre un entier $n \geqslant 2$ et renvoie S_n.

b) Conjecturer informatiquement la convergence de (S_n) et la valeur de sa limite.

c) Montrer à l'aide la question 3a et de la relation de Chasles que pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \leqslant \frac{F(n)}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} S_n$.

d) En déduire la convergence de (S_n) et la valeur de sa limite.

Réponse de l'exercice

1. a) La fonction f est continue sur I, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a pour tout $x \in I$
$$F'(x) = e^{\frac{1}{x}} > 0;$$
La fonction F est donc strictement croissante sur I.
Elle est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, \infty[$.

b) On a pour tout n et toute fonction f continue sur $[a, b]$:
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On a alors le code suivant :

```python
def F(x):
    n = 10000
    a = 1
    b = x
    h = (b-a)/n
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        t = 1+i*h
        S += h * np.exp(1/t)
    return S

```

c) Il n'y a plus qu'à tracer la courbe

```python
x = np.linspace(0.1,10,100)
y = F(x)
plt.plot(x,y)
plt.axis([0,10,-10,10])
plt.show()

```

d) On conjecture que F tend vers $-\infty$ en 0, et vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. a) Si $t \geqslant 1$, on a $1 \leqslant f(t) \leqslant e$, et par croissance de l'intégrale, on retrouve l'inégalité demandée.

b) Par théorème de minoration, on a donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.
De plus, pour tout $x \geqslant 1$,
$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{F(x)}{x} \leqslant e - \frac{e}{x} \leqslant e,$$
et donc la fonction $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ est bien bornée.

c) Soient u et v les fonctions définies sur $[1, x]$ par
$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = e^{\frac{1}{t}}.$$
Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème d'intégration par parties, on a
$$F(x) = xe^{\frac{1}{x}} - e + \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} \, dt}_{R(x)}.$$

d) Pour $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant e^{\frac{1}{t}} \leqslant e$, et par croissance de l'intégrale, on a donc pour $x \geqslant 1$
$$0 \leqslant R(x) \leqslant e \ln(x).$$
Ainsi, par théorème d'encadrement des limites, on a bien $R(x) = o(x)$.

e) On a donc $\frac{F(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e}{x} + \frac{R(x)}{x} \to 1$, et donc $F(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.

3. a) On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on retrouve directement le résultat demandé.

b) Par croissances comparées, on a $\frac{e^u}{u^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, et on dépassera donc 1 à partir d'un certain $a \in I$.

c) Pour $x \in]0, \frac{1}{a}]$, on a par relation de Chasles
$$F(x) = -\int_1^a \frac{e^u}{u^2} \, du - \int_a^{\frac{1}{x}} \frac{e^u}{u^2} \, du.$$
La première intégrale est positive, et la seconde inférieure à $a - \frac{1}{x}$ par croissance de l'intégrale et par la question précédente.
On a donc bien l'inégalité demandée.

d) Par théorème de majoration, on a donc $\lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$.

4. a) Todo

b) On conjecture que la suite (S_n) converge vers 1.

c) Par croissance de l'intégrale, on montre que
$$e^{\frac{k}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{du}{u^2} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{e^u}{u^2} \, du \leqslant e^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{du}{u^2}$$
$$\frac{ne^{\frac{k}{n}}}{k(k+1)} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{e^u}{u^2} \, du \leqslant \frac{ne^{\frac{k}{n}} e^{\frac{1}{n}}}{k(k+1)}$$
et en sommant, on retrouve l'inégalité demandée.

d) On a donc pour tout n
$$\frac{1}{n} F(x) e^{-\frac{1}{n}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n} F(n).$$