6 Généralités sur les variables aléatoires

6.1 Définitions

Dans cette partie, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Définition 6.1

On appelle *variable aléatoire réelle* toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{T}.$$

Nota : On note que si $\mathcal{T}$ est la tribu discrète (*i.e.* $\mathcal{T} = \mathfrak{p}(\Omega)$), alors toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

Définition 6.2

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on notera

- $[X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$
- $[X \neq a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq a\}$
- $[X < a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$
- $[X > a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$
- $[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$
- $[X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\}$
- Plus généralement, $[X \in E] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\}$

Théorème 6.3

Soit X une variable aléatoire. Alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $[X \in I] \in \mathcal{T}$.

Exemple : On lance deux dés, un rouge et un bleu. On considère alors l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Alors la fonction $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i, j & \longmapsto & i + j \end{array}$ est une variable aléatoire, d'image $[\![2, 12]\!]$.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. On considère alors l'univers

$$\Omega = \left\{ (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(\text{Face}, \text{Face}, \ldots)\}.$$

Alors la fonction

$$Y : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } s = (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \\ 0 & \text{si } s = (\text{Face}, \text{Face}, \ldots) \end{cases} \end{array}$$

est une variable aléatoire, d'image $\mathbb{N}$.

Définition 6.4

Soit X une variable aléatoire. On appelle *fonction de répartition de X* la fonction réelle définie par

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant t) \end{array}.$$

Proposition 6.5

Soit X une variable aléatoire. Alors sa fonction de répartition F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, et a pour limites

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1.$$

EXERCICE : Représenter les fonctions de répartitions des variables X et Y de l'exemple.

6.2 Indépendance

Regardons maintenant les différentes notions d'indépendance pour des variables aléatoires.

Définition 6.6

Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x \cap Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y).$$

Proposition 6.7

C'est équivalent à dire que pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in I \cap Y \in J) = \mathbb{P}(X \in J)\mathbb{P}(Y \in J).$$

Définition 6.8

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in I_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i).$$

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une suite de variables aléatoires. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ de I, les variables $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ sont mutuellement indépendantes.

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 6.9

Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires. Alors

- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.
- Lemme de coalition : Si $X_1, \ldots, X_{n+p}$ sont mutuellement indépendantes, et $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et $u_1, \ldots, u_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $u_1(X_1), \ldots, u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

6.3 Moments d'une variable aléatoire

6.3.1 Espérance

Proposition-Définition 6.10

Il existe une fonction appelée "espérance", notée $\mathbb{E}$ définie sur une partie de l'ensemble des variables aléatoires réelles et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\mathbb{E}$ est linéaire, *i.e.* pour toutes variables aléatoires X et Y admettant une espérance et tout réel λ, $X+\lambda Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y).$$

- $\mathbb{E}$ est positive, *i.e.* pour toute variable aléatoire X positive et possédant une espérance, $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.
- Les variables constantes admettent une espérance, et pour tout $c\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(c)=c$.

NOTA : Cette fonction correspond, pour les variables aléatoires réelles finies, à celle vue l'an dernier.

Définition 6.11

Soit X une variable aléatoire. On dit que X est *centrée* si elle admet une espérance, et que $\mathbb{E}(X)=0$.

Proposition 6.12

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Alors $X-\mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Démonstration. Par linéarité de l'espérance, la variable $X-\mathbb{E}(X)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(\mathbb{E}(X))=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0.$$

□

6.3.2 Variance

Définition 6.13

Soit X une variable aléatoire. On dit que X admet une variance si la variable $(X-\mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance, et dans ce cas, on définit la *variance* et l'*écart-type* par

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X)^2)\quad\text{et}\quad\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 6.14 – Formule de Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors si X admet une variance, alors X et X^2 admettent une espérance, et

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2.$$

Comme pour les variables réelles finies, la variance vérifie quelques propriétés :

Proposition 6.15

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors

- $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$
- $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $\exists c \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = c) = 1$
- pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Proposition-Définition 6.16

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors la variable $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X^*) = 1.$$

X^* est appelée *variable centrée réduite associée à* X.

Proposition 6.17

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors

- si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ aussi et

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

NOTA : On peut généraliser ces deux résultats à une famille de n variables mutuellement indépendantes.

6.3.3 Moments d'ordre supérieurs

On peut généraliser pour des puissances supérieures de X :

Définition 6.18

Soient X une variable aléatoire, et $m \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre m si X^m

admet une espérance, et dans ce cas, on note

$$\mu_m(X) = \mathbb{E}(X^m).$$

Proposition 6.19

Soit X une variable aléatoire. Soient $n \leqslant m$ deux entiers. Alors si X admet un moment d'ordre m, elle admet un moment d'ordre n.

En particulier, si une variable n'admet pas d'espérance, elle n'admet pas non plus de variance.

6.4 Inégalités

Terminons ce chapitre par les inégalités de Markov et et Bienaymé-Tchebytchev.

Proposition 6.20 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive, admettant une espérance. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}.$$

On en déduit l'inégalité suivante, en appliquant celle de Markov à $(X - \mathbb{E}(X))^2$:

Théorème 6.21 – Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

On déduit de cette inégalité la célèbre *loi des grands nombres* :

Théorème 6.22 – Loi faible des grands nombres

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration. Notons $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. On a alors par linéarité, $\mathbb{E}(M_n) = \mu$. De plus, par indépendance mutuelle, $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a bien pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|M_n - \mu| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$