7 Variables aléatoires réelles discrètes

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus précisément les variables aléatoires *discrètes*.

7.1 Généralités

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Définition 7.1

Une variable aléatoire est dite *discrète* si son image est dénombrable.

On reprend alors les deux exemples du chapitre précédent, qui sont bien des variables aléatoires discrètes.

Exemple : On lance deux dés, un rouge et un bleu. On considère alors l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Alors la fonction $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i, j & \longmapsto & i + j \end{array}$ est une variable aléatoire, d'image $[\![2, 12]\!]$.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. On considère alors l'univers

$$\Omega = \left\{ (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(\text{Face}, \text{Face}, \ldots)\}.$$

Alors la fonction

$$Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } s = (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \\ 0 & \text{si } s = (\text{Face}, \text{Face}, \ldots) \end{cases} \end{array}$$

est une variable aléatoire, d'image $\mathbb{N}$.

7.1.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 7.2

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle *loi de* X l'application

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}.$$

EXEMPLE : Reprenons les exemples précédent. On a alors

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Pour Y, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 0.$$

NOTA : L'ensemble $\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\}$ étant un système complet d'événements, on a bien sûr

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Notamment, on note que dans le cas d'une variable infinie, la série associée converge nécessairement.

Proposition 7.3

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors sa fonction de répartition est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant t}} \mathbb{P}(X = x).$$

Si X est à valeurs entières, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1).$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note alors que

$$[X \leqslant t] = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant t}} [X = x],$$

et la formule en découle directement.

Pour la seconde, on note que $[X = k] = [X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k - 1]$. □

EXEMPLE : La fonction de répartition de Y est donnée par

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \ F_Y(t) = 0,$$

$$\forall t \in [1, \infty[,\ F_Y(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor t \rfloor}}.$$

Corollaire 7.4

Deux variables aléatoires discrètes ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

7.1.2 Espérance

Contrairement aux lois finies, les variables aléatoires discrètes en général n'admettent pas nécessairement d'espérance.

Définition 7.5

Soit X une variable aléatoire discrète.

On dit que X *admet une espérance* si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

converge absolument.

Dans ce cas, l'*espérance de* X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie comme la somme de cette série.

On note que cette définition est compatible avec la notion d'espérance vue pour les variables finies ; dans le cas fini, la somme est finie, et donc converge.

EXEMPLE : L'espérance de la variable X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + \cdots + 12\frac{1}{36} = 7.$$

Pour Y, on note que la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge absolument (série géométrique dérivée) , et donc Y admet une espérance. On a alors

$$\mathbb{E}(Y) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

L'espérance vérifie, sous réserve de convergence, toute les propriétés usuelles de l'espérance vues dans le chapitre précédent.

La propriété suivante est un exercice classique :

Proposition 7.6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On commence par noter que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{k=\ell}^{N} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(\ell \leqslant X \leqslant N) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} (\mathbb{P}(\ell \leqslant X) - \mathbb{P}(X > N)) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant \ell) - N\mathbb{P}(X > N)
\end{aligned}$$

Supposons alors que la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge. On a alors

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant \ell).$$

La suite des sommes partielles est donc majorée, et tous les termes étant positifs, X admet une espérance.

Inversement, supposons que X admet une espérance. On a alors pour tout $k > N$

$$N\mathbb{P}(X = k) \leqslant k\mathbb{P}(X = k).$$

En notant que $N\mathbb{P}(X > N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} N\mathbb{P}(X = k)$, on a donc

$$N\mathbb{P}(X > N) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)\,;$$

la suite de droite correspondant au reste d'une série convergente, elle converge vers 0, et donc la suite $(N\mathbb{P}(X > N)$ aussi.

Finalement, la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant \ell)$ converge, et on a bien l'égalité voulue. $\square$

Pour des fonctions de variables aléatoires discrètes, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 7.7 – de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète. Soit f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.

Alors $f(X)$ est une variable aléatoire discrète, qui admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$ converge absolument.

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

EXEMPLE : Pour notre variable Y, comme la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2}{2^n}$ converge absolument, on a

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

On en déduit alors

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2.$$

7.2 Lois discrètes usuelles

7.2.1 Lois finies

Pour toutes les lois suivantes, on ne s'inquiètera pas de l'existence ou non de l'espérance et de la variance : les lois ont une image finie, et donc les sommes convergent nécessairement.

7.2.1.1 Loi certaine

Définition 7.8

On dit que X suit la *loi certaine* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $X = m$.

La fonction de répartition de la loi certaine est la suivante :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Son espérance vaut m, et sa variance est nulle.

En Python :

```python
import random as rd

```

```python
def certaine(c):
    return c
```

7.2.1.2 Loi uniforme

Cette loi sert à modéliser des phénomènes où toutes les issues sont équiprobables.

Définition 7.9

On dit que X suit la *loi uniforme* si, en notant $X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = a_i) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$.

Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on note plutôt $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

La fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(n)$ est la suivante :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n}\lfloor x \rfloor \end{array}.$$

Son espérance vaut $\frac{n+1}{2}$.

En Python :

```python
import random as rd

def uniforme(l):
    """
    l est la liste des choix possibles
    """
    return rd.choice(l)

def uniforme_int(a,b):
    """
    Simule la loi uniforme sur [|a,b|]
    """
    return rd.randint(a,b)
```

7.2.1.3 Loi de Bernoulli

Cette loi sert à modéliser des phénomènes à deux issues, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. L'une sera appelée *succès*, et l'autre *échec*.

Définition 7.10

Soit $p \in [0,1]$. On pose $q = 1 - p$.

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = q.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

La fonction de répartition d'une loi de Bernoulli est donnée par :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Son espérance vaut p , et sa variance $pq = p(1-p)$.

En Python :

```python
import random as rd

def Bernoulli(p):
    """
    Simule la loi de Bernoulli de paramètre p
    """
    if rd.random() < p: return 1
    else: return 0
```

7.2.1.4 Loi binomiale

Cette loi sert à modéliser une expérience qui consiste à compter le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 7.11

On dit que X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

La fonction de répartition d'une loi binomiale est donnée par :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{array}.$$

Son espérance vaut np, et sa variance $np(1-p)$.

En Python :

```python
import random as rd

def Binomiale(n,p):
    """
    Simule la loi binomiale de paramètres n et p
    """
    bin = 0
    for _ in range(n):
        bin = bin + Bernoulli(p)
    return bin
```

7.2.2 Lois infinies

7.2.2.1 Loi de Poisson

Définition 7.12

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une *loi de Poisson de paramètre* λ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 7.13

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda\end{aligned}$$

Pour la variance, on va commencer par calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-2)!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda^2\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2$, et donc $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Finalement, par la formule de Hyugens, on retrouve

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.$$

□

7.2.2.2 Loi géométrique

Cette loi est utilisée pour trouver le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 7.14

On dit que X suit une loi *géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Nota : Comme dans notre exemple, on peut rajouter 0 à l'image de la variable pour le cas où le succès n'arrive jamais, ce qui est impossible presque sûrement.

Proposition 7.15

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. Pour l'espérance, la série $\sum n(1-p)^{n-1}p$ est une série géométrique dérivée, qui vaut directement $\frac{1}{p}$.

Pour la variance, on commence par calculer, par théorème de transfert, l'espérance $\mathbb{E}(X(X-1))$, qui est une série géométrique dérivée convergente. On a alors

$$E(X(X-1)) = \frac{2(1-p)}{p^2},$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

En Python :

```python
import random as rd

def Geometrique(p):
    """
    Simule la loi géométrique de paramètre p
    """
    b = Bernoulli(p)
    n = 1
    while b==0:
        n+=1
        b = Bernoulli(p)
    return n
```

7.3 Exercices

Exercice 1

Un secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Chaque correspondant décroche avec probabilité p.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On tente de joindre les $n - X$ correspondants non joints lors du premier appel. On appelle Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Donner l'image de Z.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = \ell - k))$.
5. En calculant les valeurs de $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell)$, donner la loi de Z. On reconnaitra une loi connue.

Réponse de l'exercice

1. On reconnaît ici une loi binomiale de paramètres n et p, d'espérance np et de variance $np(1-p)$.
2. L'image de Z est donc $[\![0, n]\!]$.
3. X et Y étant à valeurs positives, on a $Z = 0$ si et seulement si $X = 0$ et $Y = 0$. Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0) \\ &= \mathbb{P}_{X=0}(Y = 0)\mathbb{P}(X = 0) \\ &= (1-p)^{2n}\end{aligned}$$

   De la même façons, on a $Z = 1$ si et seulement si $X = 1$ et $Y = 0$ ou $X = 0$ et $Y = 1$. Ces deux événements étant incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}_{X=1}(Y = 0)\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}_{X=0}(Y = 1)\mathbb{P}(X = 0) \\ &= (1-p)^{n-1}np(1-p)^{n-1} + (n-1)p(1-p)^{n-1}(1-p)^n \\ &= (1-p)^{2n-2}np(2-p)\end{aligned}$$

4. Comme à la question précédente, il faut et il suffit d'avoir k appels réussis au premier coup et $\ell - k$ au second coup, ce pour toute valeur de k.

5. On note que la loi de Y sachant $X = k$ est une loi binomiale de paramètres $n - k$ et p. On a donc pour tout ℓ entre 0 et n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = \ell) &= \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = \ell - k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell - k)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-k}{\ell-k} p^{\ell-k}(1-p)^{n-\ell} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} p^{\ell}(1-p)^{2n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}(1-p)^{\ell-k} \\
&= \binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell}(2-p)^{\ell}
\end{aligned}$$

On note alors que $p(2-p) = 1-(1-p)^2$, et donc Z suit une loi binomiale de paramètres n et $1-(1-p)^2$.

Exercice 2

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Déterminer α.
2. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ? Le cas échéant, les calculer.

Réponse de l'exercice

1. La somme ses probabilités doit être égale à 1 ; on trouve alors $\alpha = 4$.
2. X admet pour espérance 2, mais pas de variance.

Exercice 3

Un concierge alcoolique possède dix clefs sur son trousseau.

Pour ouvrir une porte, il choisit une clef au hasard sur le trousseau, jusqu'à obtenir la bonne.

On notera X le nombre de clefs essayées avant d'ouvrir la porte.

Les jours où le concierge est ivre, il essaye les clefs avec remise, et les jours où il est sobre, il essaye les clefs sans remise.

1. Déterminer la loi de X dans le cas où il est ivre, puis dans le cas où il est sobre.

2. Le concierge est ivre un jour sur trois.

   Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3. Sachant qu'il a eu besoin de six essais pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Et s'il a eu besoin de onze essais ?

Exercice 4

Un casino propose le jeu suivant :

- On mélange trois cartes numérotées 0, 1 et 2.
- Le joueur choisit une carte : s'il obtient 1 ou 2, il gagne la somme correspondante et rejoue, et s'il obtient 0, la partie s'arrête.

On note N le nombre de cartes tirées, et X les gains du joueur à la fin de la partie.

1. Déterminer la loi de N.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $N = n$.
3. Combien doit faire payer le casino à l'entrée pour que le jeu soit rentable pour lui ?

Réponse de l'exercice

1. La variable N suit donc une loi géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
2. Sachant $N = n$, la variable X peut prendre les valeurs de $[\![n-1, 2n-2]\!]$.
   Notons B le nombre de fois où le joueur a tiré 2 sur les $n-1$ premiers tirages.
   La variable B suit alors une loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$.
   On note alors que sachant $N = n$, $X = n - 1 + B$.
   On a alors pour $k \in [\![n-1, 2n-2]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \mathbb{P}_{[N=n]}(B = k - n + 1) = \binom{n-1}{k-n+1}\frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. On cherche alors l'espérance de X, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} k\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}(n-1+B) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)(n-1+\frac{1}{2}(n-1)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}(9-3) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Il faut donc faire payer au moins trois euros au joueur pour que le casino soit rentable.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y telle que la loi de Y conditionnée par $[X = n]$ soit une loi binomiale de paramètres n et p.

Donner la loi de Y.

Réponse de l'exercice

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(1-p)^{\ell}\lambda^{\ell}}{\ell!} \\
&= \frac{e^{-p\lambda}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On a donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 6 Perte de mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est *sans mémoire* si pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > m) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X>m}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > n).$$

1. Montrer qu'une variable est sans mémoire si et seulement si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > m) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > n+m) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > m).$$

2. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.

3. Montrer que si une variable X est sans mémoire, alors elle suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Réponse de l'exercice

1. Il suffit de développer la probabilité conditionnelle :
$$\mathbb{P}_{X>m}(X > n+m) = \frac{\mathbb{P}(X > n+m)}{\mathbb{P}(X > m)}.$$

2. On calcule la fonction de répartition de la loi géométrique :
$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k p = 1 - (1-p)^n.$$
On a donc pour tout n
$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$
On a donc directement
$$\mathbb{P}(X > n+m) = (1-p)^{n+m} = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > m).$$

3. Commençons par noter que
$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X > 0)^2,$$
et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.
On a alors pour tout n
$$\mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > n),$$
et donc la suite $(\mathbb{P}(X > n))$ est une suite géométrique, de raison $1 - p = \mathbb{P}(X > 1)$. On a alors pour tout n $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.
Si on avait $p = 1$, alors $\mathbb{P}(X > 1) = 0$ ce qui est impossible. Si on avait $p = 0$, alors $\mathbb{P}(X > n) = 1$ pour tout n, et donc $\mathbb{P}(X = n) = 0$, ce qui est impossible.
Donc $p \in]0,1[$.
Finalement, X a la fonction de répartition d'une loi géométrique, et donc suit une loi géométrique.

Exercice 7

Alice et Bob jouent à un jeu : on tire un nombre entier X aléatoirement, tel que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Si $X = 0$, la partie est nulle. Sinon, si X est pair, alors Alice donne X euros à Bob ; si X est impair, Bob donne X euros à Alice.

1. On note a et b les probabilités respectives qu'Alice et Bob gagnent. Calculer a et b.

   On pourra calculer $a + b$ et $a - b$.

2. Calculer l'espérance de gain de chacun.

Réponse de l'exercice

1. On a $a + b = 1 - e^{-\lambda}$, et
$$\begin{aligned} a - b &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2n) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^b}{n!} \\ &= e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$
   On en déduit
$$a = \frac{(}{1} - e^{-2\lambda}) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda})^2.$$
2. En calculant, on trouve l'espérance de gain d'Alice : $\lambda e^{-2\lambda}$; le jeu étant à somme nulle, l'espérance gain de Bob est de $-\lambda e^{-2\lambda}$.

Exercice 8

Rappel : *la fonction définie ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans* $[\![0; n]\!]$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), loi étant la liste* $[\mathbb{P}(X_n = 0), \ldots, \mathbb{P}(X_n = n)]$.

```python
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx = [i for i in range(len(loi))]
    bar(lx,loi)
    ylim(0,0.5)
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B. À chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.

Notations : pour chaque $n \geqslant 1$, α_n (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le n^{e} trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'évènement « la n^{e} fourmi choisit le trajet A (resp. B) ». Nous supposerons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.

On a donc : $\mathbb{P}_{[\alpha_n = a] \cap [\beta_n = b]}(A_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}_{[\alpha_n = a] \cap [\beta_n = b]}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$.

Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.

Nous supposerons qu'initialement $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r > 1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

1. Déterminer la loi des variables X_1, X_2 et X_3.
2. Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r, simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.

3. a) Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilité $[\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)]$ obtenues en faisant 1 000 simulations de la variable X_n.

   b) Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n = 100$ et $r = 2$. Commenter.

4. Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.

   On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.

5. On pose : $\forall n \geqslant 1$, $p_n(r) = \frac{r}{1+r} \cdots \frac{r^n}{1+r^n}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r^{2n+1}}\right)$.

   Démontrer que pour tout $r > 1$, les suites $(p_n(r))_{n \geq 1}$ et $(q_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

   On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.

6. En remarquant que $\forall n \geqslant 1$, $p_n(r) = \frac{1}{1+r^{-1}} \cdots \frac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que : $p(r) \geqslant \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right)$.

   On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

7. Démontrer que $\forall r > 1$, $q(r) \leqslant \exp\left(-\frac{r}{r^2-1}\right)$.

8. On admet que $\forall r > 1$, $p(r) = q(r)$. Déduire des questions précédentes un encadrement de la limite de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$ en fonction de r.

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité ?

Réponse de l'exercice

1. Il est clair que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

   Pour X_2, on a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{r+1} \\
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{r+1} \\
&= \frac{1}{r+1} \\
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{r+1}
\end{aligned}
$$

X_3 peut lui valoir 0, 1, 2 ou 3 et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3=0) &= \mathbb{P}_{X_2=0}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{X_2=2}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=2)\\
&= \frac{r}{2(r+1)}\frac{r^2}{1+r^2}\\
\mathbb{P}(X_3=1) &= \mathbb{P}_{X_2=0}(X_3=1)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=1)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{X_2=2}(X_3=1)\mathbb{P}(X_2=2)\\
&= \frac{1}{2(r+1)}\frac{1}{1+r^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{r+1}\\
\mathbb{P}(X_3=2) &= \mathbb{P}_{X_2=0}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{X_2=2}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=2)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r+1}+\frac{1}{2}\frac{r}{r+1}\frac{1}{1+r^2}\\
\mathbb{P}(X_3=3) &= \mathbb{P}_{X_2=0}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{X_2=2}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=2)\\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{r+1}\frac{r^2}{1+r^2}
\end{aligned}$$

2. On propose la fonction suivante :

```
import random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX(n,r):
    alpha = 1
    beta = 1
    X = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < alpha/(alpha+beta):
            X += 1
            alpha *= r
        else:
            beta *=r
    return X
```

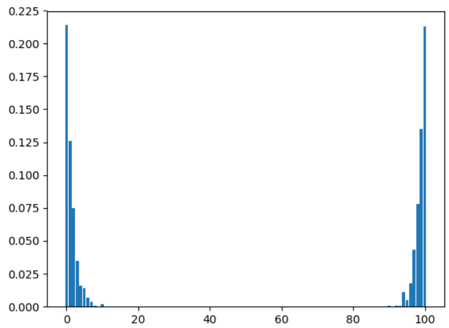
3. a) On itère le procédé :

```
def loiX(n,r):
    N=1000
    loi = [0 for _ in range(n+1)]
    for _ in range(N):
        loi[simulX(n,r)] += 1/N
    return loi
```

   b) On peut utiliser :

```
plt.bar(range(0,100+1),loiX(100,2))
plt.show()
```

   On obtient alors le diagramme suivant :



4. On note que pour tout n, $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) = \frac{r^n}{1+r^n}\mathbb{P}(X_n = n)$, et on en déduit par une simple récurrence que pour tout n
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{r^{i-1}}{1+r^{i-1}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r^i}{1+r^i}.$$

5. On note que pour tout n, $p_n(r) > 0$ et alors
$$\frac{p_{n+1}(r)}{p_n(r)} = \frac{r^{n+1}}{1+r^{n+1}} < 1.$$
La suite $(p_n(r))$ est donc strictement décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.
De même, comme $r > 1$, on a pour tout n $q_n(r) > 0$, et
$$\frac{q_{n+1}(r)}{q_n(r)} = 1 - \frac{1}{r^{2n+3}} < 1.$$
La suite $(q_n(r))$ est donc strictement décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

6. Pour la première égalité proposée, il suffit de noter que pour tout k,
$$\frac{r^k}{1+r^k} = \frac{r^k}{r^k(r^{-k}+1)} = \frac{1}{1+r^{-k}}.$$
Remarque : on a une erreur d'enoncé ; le dernier terme du produit devrait être $\frac{1}{1+r^{-n}}$.
On a donc, avec l'inégalité admise : $1 + r^{-k} \leqslant e^{r^{-k}}$, puis
$$\frac{1}{1+r^{-k}} \geqslant e^{-r^{-k}}.$$
On en déduit, tous les termes étant strictement positifs :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ p_n(r) &\geqslant e^{-r^{-1}}e^{-r^{-2}}\cdots e^{-r^{-n}}\\ &\geqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} r^{-n}\right)\\ &\geqslant \exp\left(-\frac{1}{r}\frac{1-r^{-n}}{1-r^{-1}}\right)\\ &\geqslant \exp\left(-\frac{1-r^{-n}}{r-1}\right)\end{aligned}$$
Les deux suites convergent, et donc en passant à la limite, on obtient bien
$$p(r) \geqslant \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right).$$

7. En utilisant l'inégalité admise à la question précédente, on a alors pour tout k

$$1 - \frac{1}{r^{2k+1}} \leqslant e^{-\frac{1}{r^{2k+1}}},$$

et donc pour tout k,

$$\begin{aligned} q_n(r) &\leqslant \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^{2k+1}}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(r^2)^k}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{r}\frac{1-\frac{1}{r^{2n+2}}}{1-\frac{1}{r^2}}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{r-\frac{1}{r^{2n+1}}}{r^2-1}\right) \end{aligned}$$

Comme précédemment, les deux suites convergent, et en passant à la limite, on obtient bien le résultat annoncé.

8. On note qu'on a pour tout n

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2}p_{n-1}(r),$$

et donc la suite $(\mathbb{P}(X_n = n))$ converge bien, vers $\frac{1}{2}p(r)$.

On peut donc encadrer cette limite :

$$\forall r > 1,\ \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqslant \frac{1}{2}p(r) \leqslant \frac{1}{2}\exp\left(\frac{r}{1-r^2}\right).$$

Exercice 9 Paradoxe de Penney, partie II

On rappelle qu'on considère une suite de pile ou face. On notera F_n (resp. P_n) l'événement "On obtient Face (resp. Pile) au n-ième lancer".

On appelle Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Face précédé de deux Pile, si cette configuration apparaît, et 0 sinon.

On appelle Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Pile précédé de Pile lui-même précédé de Face, si cette configuration apparaît, et 0 sinon.

On pose $c_n = \mathbb{P}(Y = n)$ et $c'_n = \mathbb{P}(Y' = n)$.

Enfin, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et $B'_n = F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B'_n) = \frac{1}{8}$.

2. Montrer que

$$[Y \leqslant n] = [Y = 0] \cup B_3 \cup \cdots \cup B_n \quad \text{et} \quad [Y' \leqslant n] = [Y' = 0] \cup B'_3 \cup \cdots \cup B'_n.$$

3. On pose pour tout n

$$u_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i\right) \quad \text{et} \quad u'_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^{n} B'_i\right).$$

a) Montrer que B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux disjoints. On admet qu'il en est de même pour B_3', B_4' et B_5'.

b) En déduire que $u_3 = u_3'$, $u_4 = u_4'$ et $u_5 = u_5'$.

c) Vérifier que $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ et $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$.

4. Soit $n \geqslant 5$. On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}(Y \leqslant k)$ et $U_k' = \mathbb{P}(Y \leqslant k)$.

a) Montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ et $u_{n+1}' = u_n' + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}')$.

b) En déduire que Y et Y' ont la même loi.

Réponse de l'exercice

1. Les lancers étant indépendant, le résultat est clair.
2. L'événement $[Y \leqslant n]$ se produit si Pile,Pile,Face apparaît à un rang inférieur ou égal à n, ou s'il n'apparaît jamais. De même pour Y'.
3. a) B_3 et B_4 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au troisième lancer.
   B_4 et B_5 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au quatrième.
   B_3 et B_5 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au troisième.

   b) On a $u_3 = \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{8}$, et par incompatibilité,
   $$u_4 = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad u_5 = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = \frac{3}{8}.$$
   Ces résultats sont les mêmes pour u_n'.

   c) On a donc bien $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(1 - 0)$ et $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1 - 0)$.
4. a) Comme dans la question précédente, on montre que B_{n-1}, B_n et B_{n+1} sont incompatibles deux à deux, et de même pour B_{n-1}', B_n' et B_{n+1}'.

   b) On a
   $$\mathbb{P}(Y \leqslant n+1) = [Y \leqslant n] \sqcup [Y = n+1] = [Y \leqslant n] \sqcup ([Y > n] \cap B_{n+1}).$$
   On en déduit alors, l'union étant disjointe
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant n+1) &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}([Y > n] \cap B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}(B_{n+1})\mathbb{P}_{B_{n+1}}(Y > n) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}(B_{n+1})(1 - \mathbb{P}_{B_{n+1}}(Y \leqslant n)) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \end{aligned}$$
   car sachant que les lancers $(n-1)$, n et $(n+1)$ donnent Pile, Pile, Face, la suite Pile, Pile, Face ne peut apparaître aux lancers $(n-2)$, $(n-1)$ et n ni aux lancers $(n-3)$, $(n-2)$ et $(n-1)$.
   Le même raisonnement fonctionne pour u_n'.

   c) Les suites (u_n) et $(u_n)'$ sont donc égales, et donc Y et Y' ont la même loi.