7 Variables aléatoires réelles discrètes

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus précisément les variables aléatoires *discrètes*.

7.1 Généralités

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Définition 7.1

Une variable aléatoire est dite *discrète* si son image est finie ou dénombrable.

On reprend alors les deux exemples du chapitre précédent, qui sont bien des variables aléatoires discrètes.

Exemple : On lance deux dés, un rouge et un bleu. On considère alors l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Alors la fonction $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i,j & \longmapsto & i+j \end{array}$ est une variable aléatoire, d'image $[\![2,12]\!]$.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. On considère alors l'univers

$$\Omega = \left\{ (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(\text{Face}, \text{Face}, \ldots)\}.$$

Alors la fonction

$$Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } s = (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \cdots, \text{Face}}_{n \text{ fois}}, \text{Pile}) \\ 0 & \text{si } s = (\text{Face}, \text{Face}, \ldots) \end{cases} \end{array}$$

est une variable aléatoire, d'image $\mathbb{N}$.

7.1.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 7.2

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle *loi de X* l'application

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array}.$$

EXEMPLE : Reprenons les exemples précédent. On a alors

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Pour Y, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=n) = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=0) = 0.$$

NOTA : L'ensemble $\{[X=x] \mid x \in X(\Omega)\}$ étant un système complet d'événements, on a bien sûr

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1.$$

Notamment, on note que dans le cas d'une variable infinie, la série associée converge nécessairement.

Proposition 7.3

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors sa fonction de répartition est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant t}} \mathbb{P}(X=x).$$

Si X est à valeurs entières, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1).$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note alors que

$$[X \leqslant t] = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant t}} [X=x],$$

et la formule en découle directement.

Pour la seconde, on note que $[X=k] = [X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k-1]$. □

EXEMPLE : La fonction de répartition de Y est donnée par

$$\forall t \in]-\infty, 1[,\ F_Y(t) = 0,$$

$$\forall t \in [1, \infty[,\ F_Y(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor t \rfloor}}.$$

Corollaire 7.4

Deux variables aléatoires discrètes ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

7.1.2 Espérance

Contrairement aux lois finies, les variables aléatoires discrètes en général n'admettent pas nécessairement d'espérance.

Définition 7.5

Soit X une variable aléatoire discrète.

On dit que X *admet une espérance* si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

converge absolument.

Dans ce cas, l'*espérance de* X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie comme la somme de cette série.

On note que cette définition est compatible avec la notion d'espérance vue pour les variables finies ; dans le cas fini, la somme est finie, et donc converge.

Exemple : L'espérance de la variable X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + \cdots + 12\frac{1}{36} = 7.$$

Pour Y, on note que la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge absolument (série géométrique dérivée) , et donc Y admet une espérance. On a alors

$$\mathbb{E}(Y) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

L'espérance vérifie, sous réserve de convergence, toute les propriétés usuelles de l'espérance vues dans le chapitre précédent.

La propriété suivante est un exercice classique :

Proposition 7.6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On commence par noter que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{k=\ell}^{N} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(\ell \leqslant X \leqslant N) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} (\mathbb{P}(\ell \leqslant X) - \mathbb{P}(X > N)) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant \ell) - N\mathbb{P}(X > N)
\end{aligned}$$

Supposons alors que la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge. On a alors

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant \ell).$$

La suite des sommes partielles est donc majorée, et tous les termes étant positifs, X admet une espérance.

Inversement, supposons que X admet une espérance. On a alors pour tout $k > N$

$$N\mathbb{P}(X = k) \leqslant k\mathbb{P}(X = k).$$

En notant que $N\mathbb{P}(X > N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} N\mathbb{P}(X = k)$, on a donc

$$N\mathbb{P}(X > N) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)\ ;$$

la suite de droite correspondant au reste d'une série convergente, elle converge vers 0, et donc la suite $(N\mathbb{P}(X > N)$ aussi.

Finalement, la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant \ell)$ converge, et on a bien l'égalité voulue. □

Pour des fonctions de variables aléatoires discrètes, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 7.7 – de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète. Soit f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.

Alors $f(X)$ est une variable aléatoire discrète, qui admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument.

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Exemple : Pour notre variable Y, comme la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2}{2^n}$ converge absolument, on a

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

On en déduit alors

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2.$$

7.2 Lois discrètes usuelles

7.2.1 Lois finies

Pour toutes les lois suivantes, on ne s'inquiètera pas de l'existence ou non de l'espérance et de la variance : les lois ont une image finie, et donc les sommes convergent nécessairement.

7.2.1.1 Loi certaine

Définition 7.8

On dit que X suit la *loi certaine* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $X = m$.

La fonction de répartition de la loi certaine est la suivante :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Son espérance vaut m, et sa variance est nulle.

En Python :

```python
import random as rd

```

```python
def certaine(c):
    return c
```

7.2.1.2 Loi uniforme

Cette loi sert à modéliser des phénomènes où toutes les issues sont équiprobables.

Définition 7.9

On dit que X suit la *loi uniforme* si, en notant $X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = a_i) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$.

Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on note plutôt $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

La fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(n)$ est la suivante :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{n}\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [\![1, n]\!] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array}.$$

Son espérance vaut $\frac{n+1}{2}$.

En Python :

```python
import random as rd

def uniforme(l):
    """
    l est la liste des choix possibles
    """
    return rd.choice(l)

def uniforme_int(a,b):
    """
    Simule la loi uniforme sur [|a,b|]
    """
    return rd.randint(a,b)
```

7.2.1.3 Loi de Bernoulli

Cette loi sert à modéliser des phénomènes à deux issues, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. L'une sera appelée *succès*, et l'autre *échec*.

Définition 7.10

Soit $p \in [0,1]$. On pose $q = 1 - p$.

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = q.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

La fonction de répartition d'une loi de Bernoulli est donnée par :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Son espérance vaut p, et sa variance $pq = p(1-p)$.

En Python :

```python
import random as rd

def Bernoulli(p):
    """
    Simule la loi de Bernoulli de paramètre p
    """
    if rd.random() < p: return 1
    else: return 0
```

7.2.1.4 Loi binomiale

Cette loi sert à modéliser une expérience qui consiste à compter le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 7.11

On dit que X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

La fonction de répartition d'une loi binomiale est donnée par :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{array}.$$

Son espérance vaut np, et sa variance $np(1-p)$.

En Python :

```python
import random as rd

def Binomiale(n,p):
    """
    Simule la loi binomiale de paramètres n et p
    """
    bin = 0
    for _ in range(n):
        bin = bin + Bernoulli(p)
    return bin
```

7.2.2 Lois infinies

7.2.2.1 Loi de Poisson

Définition 7.12

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une *loi de Poisson de paramètre* λ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 7.13

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda\end{aligned}$$

Pour la variance, on va commencer par calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-2)!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda^2\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2$, et donc $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Finalement, par la formule de Hyugens, on retrouve

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.$$

□

7.2.2.2 Loi géométrique

Cette loi est utilisée pour trouver le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 7.14

On dit que X suit une loi *géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Nota : Comme dans notre exemple, on peut rajouter 0 à l'image de la variable pour le cas où le succès n'arrive jamais, ce qui est impossible presque sûrement.

Proposition 7.15

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X admet

une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. Pour l'espérance, la série $\sum n(1-p)^{n-1}p$ est une série géométrique dérivée, qui vaut directement $\frac{1}{p}$.

Pour la variance, on commence par calculer, par théorème de transfert, l'espérance $\mathbb{E}(X(X-1))$, qui est une série géométrique dérivée convergente. On a alors

$$E(X(X-1)) = \frac{2(1-p)}{p^2},$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

En Python :

```python
import random as rd

def Geometrique(p):
    """
    Simule la loi géométrique de paramètre p
    """
    b = Bernoulli(p)
    n = 1
    while b==0:
        n+=1
        b = Bernoulli(p)
    return n
```

7.3 Exercices

Exercice 1

Un joueur lance successivement $n \in \mathbb{N}^*$ boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N, chaque case étant équiprobable. On note T_n le nombre de cases non vides après n lancers.

1. Quelle est l'image de T_n ?
2. Donner les lois de T_1 et T_2.
3. Déterminer les probabilités $P(T_n = i)$ pour $n \geqslant 2$ et $i = 1, 2$ ou n.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1).$$
5. On pose $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) x^k$.
   a) Calculer $G_n(1)$.
   b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   c) Montrer que pour tout x
   $$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G_n'(x) + x G_n(x).$$
   d) En déduire que $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(T_n) + 1$, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$, ainsi que sa limite.

Réponse de l'exercice

1. Nécessairement, il y aura au moins une case non vide. L'image de T_n est donc $[\![1, \min(n, N)]\!]$.
2. Après avoir lancé une boule, il y aura une case non vide, et $N - 1$ cases vides. Donc
$$\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1.$$
Pour T_2, il y a deux cas : soit les deux boules sont dans la même cases, soit elles sont dans des cases différentes. On a alors
$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{N-1}{N}.$$
3. Pour $i = 1$, on a
$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}.$$
Pour $i = 2$, il faut choisir deux cases ($\binom{N}{2}$ choix), puis une façon de tirer dans ces deux cases uniquement ($2^n - 2$ choix).

On a donc
$$\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n} = \frac{2^{n-1}(N-1)}{N^{n-1}}.$$
Pour $i = n$: si $n > N$, c'est impossible, et donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$. Supposons alors $n \leqslant N$. On a alors
$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}.$$

4. On commence par noter qu'en lançant une boule de plus, seules deux situations sont possibles : la boule arrive dans une case déjà occupée, ne changeant pas le nombre de cases non vides ; la boule arrive dans une case vide, augmentant le nombre de cases non vides de 1.

   On a donc, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n+1} = k) &= \mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1} = k)\mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k)\mathbb{P}(T_n = k-1)\\ &= \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)\end{aligned}$$

5. a) Il est clair que $G_n(1) = 1$.

   b) On a $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{E}(T_n)$.

   c) En multipliant par x^k et en sommant le résultat de la question 4, on obtient donc
$$\begin{aligned}G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-(k-1)}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)x^k\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(N-k)\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1}\\ &= \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)\end{aligned}$$
   en séparant la dernière somme en deux.

   d) On a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1}) &= G_{n+1}'(1)\\ &= \frac{1}{N}(1-2)G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1)\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1\end{aligned}$$
   On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. Posons $u_n = \mathbb{E}(T_n)$. Alors la suite $(u_n - N)$ est géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$, de premier terme $1 - N$, et donc pour tout n
$$\mathbb{E}(T_n) = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} + N.$$
   Quand $n \to \infty$, on a donc $\lim \mathbb{E}(T_n) = N$.

Exercice 2

Des vaches sont atteintes par une maladie avec probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie, deux méthodes sont possibles :

- faire une analyse sur le lait de chacune des vaches ;

- faire une analyse sur le mélange de tous les laits, et si le résultat est positif, tester le lait de chaque vache.

Pour cette seconde méthode, on pose X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses nécessaires pour n vaches, et $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et donner son espérance.
2. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(0.85)x + \ln(x)$, et donner les entiers n tels que $f(n) > 0$.
   On donne $f(17) \simeq 0.07$ et $f(18) \simeq -0.03$.
3. Quelle méthode permet de faire le moins d'analyses ?

Réponse de l'exercice

1. Notons B_n la variable aléatoire qui compte le nombre de vaches malades. On a alors $B_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
   La variable X_n peut alors prendre deux valeurs : 1 et $n+1$. On a alors
   $$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(B_n = 0) = (1-p)^n,$$
   et
   $$\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}(B_n \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n.$$
   On a alors la loi de Y_n :
   $$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{1}{n}\right) = (1-p)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(Y_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - (1-p)^n.$$
   L'espérance de Y_n est donc
   $$\mathbb{E}(Y_n) = (1-p)^n \frac{1}{n} + (1 + \frac{1}{n})(1 - (1-p)^n) = 1 - (1-p)^n + \frac{1}{n}.$$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f'(x) = \ln(1-p) + \frac{1}{x}.$$
   La fonction f est donc croissante sur $\left]0, -\frac{1}{\ln(1-p)}\right]$, et décroissante sur $\left[-\frac{1}{\ln(1-p)}, \infty\right[$.
   On note ensuite que $f(1) < 0$, $f(2) = \ln(2 \times 0.85^2) > 0$. Les entiers pour lesquels $f(n) > 0$ sont donc ceux de l'intervalle $[\![2, 17]\!]$.
3. On cherche donc avec quelle méthode le nombre moyen d'analyse par vache est le plus faible. On veut donc résoudre, avec n entier
   $$1 > 1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n,$$
   autrement dit, par croissance du logarithme
   $$n \ln(1-p) + \ln(n) > 0.$$
   D'après la question précédente, la première méthode est moins efficace pour des troupeaux de 2 à 17 vaches.

Exercice 3 Loi de succession de Laplace

On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N ; la k-ième contenant k boules rouges et $N-k$ blanches. On choisit une urne au hasard, et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On notera R_n l'événement "on a tiré une boule rouge au n-ème tirage".

1. Calculer les probabilités de R_1 et $R_1 \cap R_2$.
2. On a tiré des boules rouges aux n premiers tirages. Quelle est la probabilité d'avoir à nouveau une boule rouge au $(n+1)$-ème tirage ?
3. Calculer la limite quand $N \to \infty$ de
$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$
On fera apparaître une somme de Riemann.
4. En déduire la limite quand $N \to \infty$ de la probabilité trouvée à la question 2.

Réponse de l'exercice

1. On a
$$\mathbb{P}(R_1) = \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}\frac{1}{N+1} = \frac{1}{2},$$
et
$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \sum_{k=0}^{N}\frac{k^2}{N^2}\frac{1}{N+1} = \frac{2N+1}{6N}.$$
2. De la même façon, on peut calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{n+1})$ avec la formule des probabilités totales pour trouver
$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{n+1}) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}.$$
On en déduit la probabilité conditionnelle cherchée :
$$\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}.$$
3. On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n &= \left(\frac{N+1}{N}\right)^n\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N+1}\right)^n \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$
4. Avec la limite trouvée à la question précédente, on trouve alors une limite de $\frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 4

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire une boule au hasard.

- si cette boule est noire, le jeu s'arrête
- si cette boule est blanche, on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule blanche, puis on recommence le tirage.

On note X le rang d'apparition de la boule noire, ou 0 si elle n'apparaît jamais.

1. Calculer la loi de probabilité de la variable X.
2. Donner sa fonction de répartition.
3. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ?

Réponse de l'exercice

1. On note que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Notons B_n l'événement "On a tiré une boule blanche au n-ième tirage". On a alors
$$[X = n] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}.$$
Par la formule des probabilités composées, on a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$
2. La fonction de répartition de X est donnée par
$$\begin{aligned}F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leqslant t)\\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1}{n(n+1)}\\ &= 1 - \frac{1}{\lfloor t \rfloor + 1}\end{aligned}$$
3. On a $n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n+1}$, et donc la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ est divergente. X n'admet donc pas d'espérance, et donc pas de variance.

Exercice 5 Paradoxe de Saint-Petersbourg

Une casino propose le jeu suivant :

- Le joueur paye un droit d'entrée fixé, soit N.

- Le casino donne un euro au joueur, et lance une pièce équilibrée.
- Si la pièce tombe sur Pile, le casino double les gains du joueur. Sinon, le jeu s'arrête, et le joueur part avec ses gains.

On note X la variable aléatoire des gains du joueurs.

1. Donner la loi de X.
2. X admet-elle une espérance ? Comment peut-on l'interpréter ?

Réponse de l'exercice

1. Les gains du joueur peuvent être tous les entiers de la forme $2^k - N$, $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1 - n) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X = 2 - N) &= \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ \mathbb{P}(X = 2^k - N) &= \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

2. On étudie donc la convergence de la série $\sum \frac{2^k - N}{2^{k+1}}$, qui est équivalente à la convergence de la série $\sum \frac{1}{2}$, qui diverge grossièrement vers $+\infty$.
   Les gains du joueurs, quelque soit le droit d'entrée, sont donc, en moyenne, infinis.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y telle que la loi de Y conditionnée par $[X = n]$ soit une loi binomiale de paramètres n et p.

Donner la loi de Y.

Réponse de l'exercice

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{\ell} \lambda^{\ell}}{\ell!} \\ &= \frac{e^{-p\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

On a donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer la loi de $(-1)^X$.

Réponse de l'exercice

Notons $Y = (-1)^X$. Alors Y prend pour valeurs -1 et 1. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X \text{ pair}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Or on note que

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda} + e^{-\lambda}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

On en déduit directement que $\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$.

Exercice 8 Perte de mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est *sans mémoire* si pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > m) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X>m}(X > m + n) = \mathbb{P}(X > n).$$

1. Montrer qu'une variable est sans mémoire si et seulement si

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > m) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > n + m) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > m).$$

2. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que X est sans mémoire.

3. Montrer que si une variable X est sans mémoire, alors elle suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Réponse de l'exercice

1. Il suffit de développer la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{X>m}(X > n + m) = \frac{\mathbb{P}(X > n + m)}{\mathbb{P}(X > m)}.$$

2. On calcule la fonction de répartition de la loi géométrique :

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^k p = 1 - (1-p)^n.$$

   On a donc pour tout n

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$

   On a donc directement

$$\mathbb{P}(X > n + m) = (1-p)^{n+m} = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > m).$$

3. Commençons par noter que
$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X > 0)^2,$$
et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.
On a alors pour tout n
$$\mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > n),$$
et donc la suite $(\mathbb{P}(X > n))$ est une suite géométrique, de raison $1 - p = \mathbb{P}(X > 1)$. On a alors pour tout n $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.
Si on avait $p = 1$, alors $\mathbb{P}(X > 1) = 0$ ce qui est impossible. Si on avait $p = 0$, alors $\mathbb{P}(X > n) = 1$ pour tout n, et donc $\mathbb{P}(X = n) = 0$, ce qui est impossible.
Donc $p \in]0, 1[$.
Finalement, X a la fonction de répartition d'une loi géométrique, et donc suit une loi géométrique.

Exercice 9

Une princesse est retenue prisonnière dans un château. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive devant le château, il se retrouve devant trois portes et en ouvre une au hasard.

- s'il ouvre la première porte alors il délivre la princesse
- s'il ouvre la deuxième porte alors un dragon apparaît et le dévore
- s'il ouvre la troisième porte alors une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie tout ce qu'il a vu et est mis à la porte du château.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il meure ou délivre la princesse.

1. Calculer la probabilité qu'il délivre la princesse.
2. Soit T le nombre tentatives du prince. Donner la loi de T et son espérance.
3. Si le prince échoue dans sa tâche alors le syndicat des princes charmants en envoie immédiatement un autre, jusqu'à ce que la princesse soit délivrée.
   a) Montrer que la princesse est délivrée presque sûrement.
   b) Calculer le nombre moyen de princes nécessaires pour délivrer la princesse.

Réponse de l'exercice

1. Notons M_i, D_i et O_i les événements respectifs "le prince délivre la princesse", "le prince meurt", "le prince rencontre la sorcière" à la i-ième tentative. Alors
$$\mathbb{P}(D_i) = \mathbb{P}(O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_{i-1} \cap D_i) = \frac{1}{3^i}.$$
On a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_i) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. T suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$, et donc $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2}$.
3. a) Soit N la variable qui compte le nombre de prince, et qui vaut 0 si aucun ne délivre la princesse. Alors N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, et en particulier $\mathbb{P}(N = 0) = 0$.
   b) On a donc $\mathbb{E}(N) = 2$.

Exercice 10

Un agent biologique pathogène se déplace et se multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulverisé pour combattre l'infection.

On discrétise le temps en instants successifs séparés d'une duŕee δt, et on note pour tout entier naturel n :

- U_n le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$.
- X_n et Y_n le nombre de cellules actives respectivement divisées/neutralisées entre $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$.

1. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note α la probabilité pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque δt et on suppose que les cellules n'interagissent pas.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de X_n sachant l'événement $[U_n = k]$.
   (On reconnaîtra le schéma d'une loi usuelle.)
   En déduire en fonction de k la valeur de la somme
   $$\sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i).$$
   b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \alpha\mathbb{E}(U_n)$.
   c) Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis montrer que $\mathbb{E}(U_n) = (1+\alpha)^n N$, où N est le nombre initial de cellules.
2. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut être neutralisée avec la probabilité β, et sinon elle peut se diviser avec la probabilité α précédente.
   a) Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n.
   b) Déterminer une condition sur α et β pour que l'infection soit enrayée.
3. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement N cellule lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.
   On choisira des valeurs de α et β permettant de décrire les différents cas de figure possibles.

Réponse de l'exercice

1. a) On suppose donc qu'on a k cellules. Chacune d'entre elle se divise avec probabilité α, et donc la loi de X_n sachant $U_n = k$ est une loi binomiale de paramètre k et α.
   La somme voulue est donc l'espérance de X_n sachant $U_n = k$, soit αk.

   b) On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i)\mathbb{P}(U_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(U_n = k) \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha k\mathbb{P}(U_n = k) \\
&= \alpha\mathbb{E}(U_n)
\end{aligned}$$

   c) On a pour tout n $U_{n+1} = U_n + X_n$, et par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbb{E}(U_{n+1}) = \mathbb{E}(U_n) + \mathbb{E}(X_n) = (1+\alpha)\mathbb{E}(U_n).$$

   La suite $(\mathbb{E}(U_n))$ est donc une suite géométrique, et on retrouve $\mathbb{E}(U_n) = (1+\alpha)^n N$.

2. a) De façon analogue à la première question, on a $\mathbb{E}(Y_n) = \beta\mathbb{E}(U_n)$. Mais la loi conditionnelle de X_n sachant $U_n = k$ change :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}_{[U_n=k]\cap[Y_n=j]}(X_n = i)\mathbb{P}_{[U_n=k]}(Y_n = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k-j}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-j-i} \binom{k}{j} \beta^j (1-\beta)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{k-i}{j} \alpha^i (1-\alpha)^{k-j-i} \beta^j (1-\beta)^{k-j} \\
&= \binom{k}{i} \alpha^i (1-\beta)^i \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} \beta^j ((1-\alpha)(1-\beta))^{k-i-j} \\
&= \binom{k}{i} \alpha^i (1-\beta)^i (\beta + (1-\alpha)(1-\beta))^{k-i} \\
&= \binom{k}{i} (\alpha(1-\beta))^i (1-\alpha(1-\beta))^{k-i}
\end{aligned}$$

   La loi conditionnelle de X_n sachant $U_n = k$ est donc une loi binomiale de paramètres k et $\alpha(1-\beta)$.
   Finalement, en notant que

$$\mathbb{E}(U_{n+1}) = \mathbb{E}(U_n) + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(Y_n),$$

   on trouve

$$\mathbb{E}(U_{n+1}) = (1+\alpha-\beta-\alpha\beta)\mathbb{E}(U_n),$$

   puis

$$\mathbb{E}(U_n) = (1+\alpha-\beta-\alpha\beta)^n N.$$

   b) L'infection sera enrayée si et seulement si $|1+\alpha-\beta-\alpha\beta| < 1$.

3. On propose

```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt


def Exp(N,a,b,n):
    Evol= [N]
    NbBact = N
    for _ in range(n):
        for _ in range(NbBact):
            if rd.random() < b: NbBact -= 1
        for _ in range(NbBact):
            if rd.random() < a: NbBact += 1
        Evol.append(NbBact)
    return Evol

def plotExp(N,a,b,n):
    Evol = Exp(N,a,b,n)
    plt.plot(range(0,n+1),Evol)
    plt.show()

```

Exercice 11 Paradoxe de Penney, partie II

On rappelle qu'on considère une suite de pile ou face. On notera F_n (resp. P_n) l'événement "On obtient Face (resp. Pile) au n-ième lancer".

On appelle Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Face précédé de deux Pile, si cette configuration apparaît, et 0 sinon.

On appelle Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Pile précédé de Pile lui-même précédé de Face, si cette configuration apparaît, et 0 sinon.

On pose $c_n = \mathbb{P}(Y = n)$ et $c'_n = \mathbb{P}(Y' = n)$.

Enfin, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et $B'_n = F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B'_n) = \frac{1}{8}$.
2. Montrer que
$$[Y \leqslant n] = [Y = 0] \cup B_3 \cup \cdots \cup B_n \quad \text{et} \quad [Y' \leqslant n] = [Y' = 0] \cup B'_3 \cup \cdots \cup B'_n.$$
3. On pose pour tout n
$$u_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i\right) \quad \text{et} \quad u'_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=3}^{n} B'_i\right).$$
   a) Montrer que B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux disjoints. On admet qu'il en est de même pour B'_3, B'_4 et B'_5.
   b) En déduire que $u_3 = u'_3$, $u_4 = u'_4$ et $u_5 = u'_5$.
   c) Vérifier que $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ et $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$.
4. Soit $n \geqslant 5$. On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}(Y \leqslant k)$ et $U'_k = \mathbb{P}(Y \leqslant k)$.

a) Montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ et $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$.

b) En déduire que Y et Y' ont la même loi.

Réponse de l'exercice

1. Les lancers étant indépendant, le résultat est clair.
2. L'événement $[Y \leqslant n]$ se produit si Pile,Pile,Face apparaît à un rang inférieur ou égal à n, ou s'il n'apparaît jamais. De même pour Y'.
3. a) B_3 et B_4 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au troisième lancer.
   B_4 et B_5 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au quatrième.
   B_3 et B_5 sont incompatibles car on ne peut faire Face et Pile au troisième.

   b) On a $u_3 = \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{8}$, et par incompatibilité,
   $$u_4 = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad u_5 = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = \frac{3}{8}.$$
   Ces résultats sont les mêmes pour u'_n.

   c) On a donc bien $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(1 - 0)$ et $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1 - 0)$.
4. a) Comme dans la question précédente, on montre que B_{n-1}, B_n et B_{n+1} sont incompatibles deux à deux, et de même pour B'_{n-1}, B'_n et B'_{n+1}.

   b) On a
   $$\mathbb{P}(Y \leqslant n+1) = [Y \leqslant n] \sqcup [Y = n+1] = [Y \leqslant n] \sqcup ([Y > n] \cap B_{n+1}).$$
   On en déduit alors, l'union étant disjointe
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant n+1) &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}([Y > n] \cap B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}(B_{n+1})\mathbb{P}_{B_{n+1}}(Y > n) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}(B_{n+1})(1 - \mathbb{P}_{B_{n+1}}(Y \leqslant n)) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \end{aligned}$$
   car sachant que les lancers $(n-1)$, n et $(n+1)$ donnent Pile, Pile, Face, la suite Pile, Pile, Face ne peut apparaître aux lancers $(n-2)$, $(n-1)$ et n ni aux lancers $(n-3)$, $(n-2)$ et $(n-1)$.
   Le même raisonnement fonctionne pour u'_n.

   c) Les suites (u_n) et $(u_n)'$ sont donc égales, et donc Y et Y' ont la même loi.